

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

---

СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ

ВЫПУСК

14

Под ред. академика  
Б. Б. Кадомцева



МОСКВА ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ 1985

УДК 533.9.01

**Вопросы теории плазмы:** Сб статей. Вып. 14/ Под ред. акад. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1985, 232 с.

Приведены обзоры по теории солитонов, циклотронным колебаниям равновесной плазмы.

Для научных работников и инженеров.

Ил. 71. Библиогр. 267.

Редколлегия: А. А. Галеев, В. В. Парайл,  
О. П. Погуце, Д. Д. Рютов

## Введение

Хорошо известно, что высокотемпературная плазма бывает неустойчива относительно возбуждения разнообразных колебаний. В случае возбуждения большого числа степеней свободы говорят, что плазма турбулентна. С конца 50-х годов изучение турбулентности стало основным направлением в теории плазмы, что вначале привело к созданию теории слабой турбулентности. Уравнения теории слабой турбулентности получаются усреднением по случайным фазам взаимодействующих волн. В последнее время стало ясно, что для турбулентности очень существенна корреляция фаз, приводящая к появлению структур. Структуры могут возникать в вязкой жидкости, когда возбуждается всего несколько степеней свободы, — таковы ячейки Бенара в подогреваемой жидкости, ячейки Стюарта в жидкости между вращающимися цилиндрами. Другим типом хорошо известных структур являются разрывы, в обычной гидродинамике представленные ударными волнами и гребешками гравитационных волн на воде, а в плазме — самофокусировкой световых пучков и ленгмюровским коллапсом.

Данный обзор посвящен третьему типу структур — солитонам. Солитоном будем называть устойчивое образование, локализованное в пространстве и описываемое гамильтоновыми уравнениями. Солитонные решения нелинейных уравнений для волн на мелкой воде рассматривались в конце прошлого века Кортевегом и де Фризом; в современную физику плазмы они были введены Р. З. Сагдеевым.

Важная роль частных решений в виде солитонов общепризнана. Она определяется тем, что обычно солитон является устойчивым образованием, поэтому возмущения в средах, где возможны солитоны, имеют тенденцию распадаться на солитоны и свободные волны. Главным свойством солитона является его устойчивость, хотя существенна и локализованность в пространстве. Дисперсионное расплывание пакета волн в солитоне сдерживается нелинейной корреляцией фаз. Устойчивые гидродинамические вихри не имеют универсальной формы из-за бесконечного набора интегралов замороженности, но в остальном играют ту же роль, что и солитоны, поэтому они также рассматриваются в обзоре. Поведение солитонов в уравнениях, решаемых методом обратной задачи рассеяния (МОЗР), описывается хорошо развитой математической теорией и поэтому в данном обзоре не обсуждается, хотя приводятся способы обнаружения таких уравнений.

Обзор общих вопросов турбулентности плазмы можно найти в [1—4]. Авторы стремились написать настоящий обзор так, чтобы он был пригоден для первого ознакомления с вопросом и в то же время заметно отличался по содержанию от известных обзоров по солитонам [5—11].

## 1. Простейшие солитоны и интегралы движения

Существуют два подхода к отысканию солитонных решений: 1) непосредственное нахождение локализованных решений уравнений; 2) отыскание минимума энергии при фиксированных остальных интегралах.

Уравнения одномерных стационарных волн нередко удается решить в квадратурах. Такая возможность существует благодаря тому, что для волн, стационарных в некоторой системе координат, закон сохранения импульса имеет простой вид  $\Phi(x) = \text{const}$ , где  $\Phi$  — поток импульса в точке  $x$ . Если волна в диспергирующей среде характеризуется некоторой величиной  $u(x)$ , то выражение для  $\Phi(x)$  должно содержать производные по  $x$ . Одно из простейших выражений

$$\Phi(x) = (u_x)^2 + f(u) = c, \quad (1.1)$$

где  $f(u) \rightarrow 0$ . Уравнение (1.1) легко интегрируется:

$$x = \int \frac{du}{\sqrt{c - f(u)}}. \quad (1.2)$$

Решениям, убывающим при  $x \rightarrow \pm \infty$ , очевидно, соответствует случай  $c=0$ , так что поток импульса равен нулю всюду. Посмотрим, как возникает уравнение (1.1) из уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ) — фундаментального уравнения теории слабодиспергирующих волн:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.3)$$

Это уравнение описывает волны, дисперсия которых близка к звуковой, если перейти в систему координат, движущуюся со скоростью звука. Таковы волны на мелкой воде, ионно-звуковые волны в плазме и многие другие. Ищем решение в виде  $u(x - c_1 t)$ , при этом (1.3) превращается после интегрирования в

$$u_{xx} = c_2 + c_1 u - u^2/2. \quad (1.4)$$

Роль константы  $c_2$  сводится к преобразованию  $u \rightarrow au + b$ , поэтому положим  $c_2 = 0$ . Уравнение (1.4) имеет вид уравнения Ньютона для частицы, движущейся в заданном потенциале, если  $u$  рассматривать как координату, а  $x$  — как время. Поэтому (1.4) имеет интеграл «энергии»:

$$(u_x)^2/2 + \int (u^2/2 - c_1 u) du = c_3. \quad (1.5)$$

Заметим, что мы пришли к уравнению (1.1), где  $f(u) = u^3/3 - c_1 u^2$ . Мы специально начали изложение с формулы (1.1), чтобы под-



черкнуть, что понижение порядка уравнений (1.4)→(1.5) не случайно; оно связано с законом сохранения потока импульса. При использованном выборе  $f(u)$  уравнение (1.2) интегрируется в эллиптических функциях, но исследовать решения удобнее, рассматривая график «потенциальной энергии»  $f(u)/2$  (рис. 1.1).

Финитному движению, при котором частица заключена в потенциальной яме, соответствуют имеющие физический смысл [при которых  $u(x)$  не обращается в бесконечность] решения, при этом  $u(x)$  — периодическая волна, период которой стремится к бесконечности, когда «энергия» частицы стремится к нулю и когда она почти все время  $x$  проводит на вершине барьера. Именно этот случай, при котором  $u \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ , соответствует солитону, при этом  $c=0$  и (1.2) дает

$$u = \frac{3c_1}{\text{ch}^2(x'/\sqrt{2}c_1)}, \quad x' = x - c_1 t. \quad (1.6)$$

Если сохранить константу  $c_2$  в формуле (1.4), то солитонное решение при  $x \rightarrow \pm \infty$  будет стремиться не к нулю, а к константе. Например, для волн на мелкой воде это означает, что рассматривается возмущение, изменяющее начальную глубину жидкости.

Вернувшись к формуле (1.6), видим, что с ростом отличия скорости солитона от звуковой его амплитуда растет, а ширина уменьшается. Это, впрочем, видно и из исходного уравнения (1.3), если потребовать, чтобы все члены в (1.3) были одного порядка. Нелинейность в отсутствие дисперсии привела бы к опрокидыванию волны. Солитонное решение соответствует балансу дисперсии и опрокидывания.

Уравнение КдФ — фундаментальное для описания трехволнового взаимодействия волн, дисперсия которых близка к звуковой. Для четырехволнового взаимодействия высокочастотных волн таким является нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iE_t + E_{xx} = -|E|^2 E. \quad (1.7)$$

Это уравнение описывает ленгмюровские волны при групповой скорости, значительно меньшей скорости звука, и многие другие. Отыскивая решения в виде  $E = E' \exp[i(\omega t + kx)]$ , обнаруживаем, что уравнение для  $E'$  приводится к виду (1.2):  $f(E') = (\omega - k^2) \times \times (E')^2 - (E')^4$ . Это уравнение также интегрируется в эллиптических функциях. Если изобразить «потенциальную энергию»  $f(E')$  (рис. 1.2), то видно, что в отличие от КдФ при любой «кинетической энергии» движение финитно, причем при  $\omega - k^2 < 0$  (именно этот случай изображен на рис. 1.2) существуют два типа периодических решений  $a$  и  $b$ , в качестве общей асимптотики имеющие солитон:

$$E' = E_0 / \text{ch} \kappa x; \quad E_0 = \kappa \sqrt{2}; \quad \omega - k^2 = -\kappa^2. \quad (1.8)$$

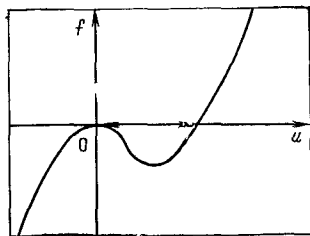


Рис. 1.1. График «потенциальной энергии» для уравнения КдФ

При заданной амплитуде солитоны (1.8) могут двигаться с любой скоростью, так как НУШ галилеево инвариантно.

Существует также метод анализа, основанный на рассмотрении фазовой плоскости. Для этого в координатах  $E_x, E$  изображают линии уровня потока импульса. Для случая НУШ при  $\omega - k^2 < 0$  фазовый портрет приведен на рис. 1.3. Солитонному решению соответствует сепаратриса, разделяющая две области периодических в пространстве волн и входящая в точку  $E_x=0, E=0$ .

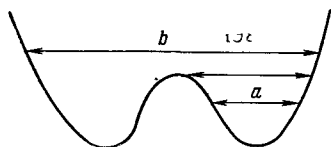


Рис. 1.2. График «потенциальной энергии» для НУШ (случай отрицательной частоты)

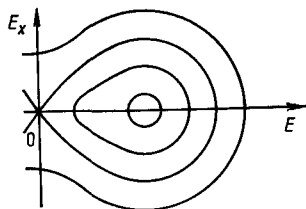


Рис. 1.3. Фазовый портрет НУШ в случае отрицательной частоты

Итак, мы рассмотрели локализованные решения уравнений типа (1.2). Чем они выделены физически? Мы уже знаем, что солитонные решения соответствуют нулевому потоку импульса. Гораздо более важно, что солитон минимизирует (или максимизирует) энергию при заданном втором интеграле движения (импульсе для КдФ, числе волн для НУШ) и этим отличается от стационарных решений в виде периодических волн. Действительно, НУШ и КдФ сохраняют энергию, так как они гамильтоновы:

$$i E_t = \delta H / \delta E^*; \quad H = \int (E_x E_x^* - |E E^*|^2 / 2) dx; \quad (1.9)$$

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}; \quad H = \int \left( \frac{u_x^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) dx \quad (1.10)$$

(более подробно этот вопрос рассмотрен в [10, с. 44]). Помимо сохранения гамильтониана  $H$ , (1.9) сохраняет также число волн

$$N = \int |E|^2 dx, \quad (1.11)$$

что связано с инвариантностью  $H$  относительно замены  $E \rightarrow E \exp(i\alpha)$ . Проще всего в сохранении  $N$  убедиться прямым дифференцированием  $N$  по времени. Оба гамильтониана, (1.9) и (1.10), трансляционно инвариантны, поэтому сохраняется импульс, который для уравнения КдФ имеет вид

$$P = \int u^2 dx. \quad (1.12)$$

Выбирая волновой пакет в виде плавного горба достаточно большой ширины, можно добиться отрицательности гамильтонианов при любом числе волн  $N$  или импульсе  $P$ . Если теперь начать уменьшать ширину пакета при сохранении  $N$ , то будет расти от-

рицательный член в гамильтониане (1.9), но положительный будет расти еще быстрее. Это означает, что существует минимум гамильтониана при фиксированном  $P$ ; соответствующее ему решение и называют солитонным. Можно строго доказать ограниченность гамильтониана снизу и тем самым, с учетом его отрицательности на пробных функциях, существование нетривиального абсолютного минимума. (Нетривиальность гарантируется отрицательностью на пробных функциях.) Впервые этот способ был применен В. Е. Захаровым и Е. А. Кузнецовым для доказательства существования трехмерного ионно-звукового солитона в магнитном поле [12]. Проиллюстрируем его на примере НУШ. Оценим гамильтониан снизу. Имеем интерполяционное неравенство

$$\int |E|^4 dx \leq \xi \left( \int |E|^2 dx \right)^{3/2} \left( \int |E_x|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.13)$$

Обозначая  $\int |E_x|^2 dx = T$ , получаем

$$H \geq T - \xi N^{3/2} T^{1/2} \geq -\xi^2 N^3 / 2, \quad (1.14)$$

откуда очевидно существование минимума  $H$  при фиксированном  $N$ . Этот минимум, вообще говоря, может не достигаться на гладких решениях, но для систем с конечным числом фиксированных интегралов эта трудность не возникает (подробнее см. § 15).

Метод Захарова — Кузнецова применим и в неодномерном случае. Приведем сравнительно громоздкий пример [13], в котором рассматривается двумерный аналог уравнения КдФ [14]:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = 3u_{yy}. \quad (1.15)$$

Это уравнение можно записать в гамильтоновом виде:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}; & H &= \frac{I_1}{2} + \frac{3}{2} I_2 + I_3; \\ I_1 &= \int u_x^2 d^2 r; & I_2 &= \int \omega_y d^2 r; & I_3 &= \int u^3 d^2 r; & \omega_x &= u. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Помимо гамильтониана уравнение (1.15) сохраняет импульс

$$P = \int u^2 d^2 r. \quad (1.17)$$

Оценим единственный отрицательный член в гамильтониане  $\int u^3 d^2 r \leq \left( \int u^2 d^2 r \int u^4 d^2 r \right)^{1/2}$ :

$$\int u^4 d^2 r \leq 4 \left( \int u^2 d^2 r \right)^{1/2} \int u_x^2 d^2 r \left( \int \omega_y^2 d^2 r \right)^{1/2}$$

(подробнее см. в [13], откуда  $I_3 \leq 2P^{3/4} I_1^{1/2} I_2^{1/2}$ ,  $H \geq (1/2) I_1 + (3/2) I_2 - 2P^{3/4} I_1^{1/2} I_2^{1/4} \geq -(2/3) P^3$ ).

Гамильтониан ограничен снизу при фиксированном  $P$ , его минимуму соответствует двумерный солитон, численно обнаруженный в [15], а аналитически — в [16].

## 2. Солитон — статистический аттрактор

Солитон реализует минимум энергии, поэтому произвольное начальное возмущение эволюционирует к состоянию солитоны + свободные волны.

Солитон — весьма частное решение даже в классе стационарных решений и может играть в турбулентности важную роль, лишь если является притягивающим решением. (В каком смысле — уточним далее.) Обратимся к аналогии. Механическая система, например шарик в потенциальной яме, стремится к состоянию устойчивого равновесия лишь в том случае, если есть возможность сбросить энергию в другие степени свободы. Таким образом, стремление системы к минимуму энергии на макроскопической степени свободы связано с тенденцией равномерного распределения

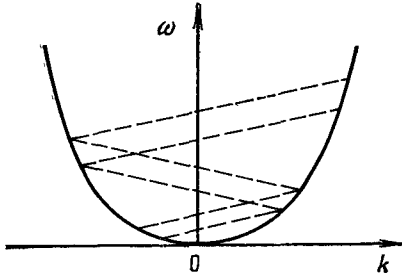


Рис. 2.1. Распад системы одномерных волн на невзаимодействующие подсистемы (изображены две подсистемы): сплошная линия — дисперсионная кривая ленгмюровских волн; пунктир —  $\omega$  и  $k$  для звуковых волн

энергии по степеням свободы и является термодинамическим принципом. Поэтому необходимо рассмотреть термодинамику нелинейных волн [17, 18]. Сделаем это на примере одномерных ленгмюровских и звуковых волн. Эти волны можно описывать уравнениями [19], многократно использовавшимися при численном моделировании,

$$iE_t + E_{xx} = nE; \quad n_{tt} - n_{xx} = |E|_{xx}^2. \quad (2.1)$$

Отметим, что в рамках слабой турбулентности перекачка энергии в мелкомасштабные волны запрещена, поэтому система способна эволюционировать без затухания много характерных времен. Действительно, ленгмюровская волна может распасться на ленгмюровскую и звуковую, вторичная ленгмюровская волна также может испытать распад, и так до тех пор, пока не получится волна, которая уже ни на что распасться не может. Обратные слияния в эту систему новых волн не вводят, и система распадается на ряд невзаимодействующих подсистем (рис. 2.1). Учет нелинейных сдвигов частоты в солитоне приводит к зацеплению подсистем, но при длинах волн, в несколько раз меньших размера солитона, слаботурбулентный спектр обрезается, и установление термодинамического равновесия возможно.

Равномерное распределение по гиперповерхности, заданной интегралами движения, осуществляется в канонических переменных, поэтому перепишем систему (2.1) в виде

$$H = \sum_k n_k \omega_k + \sum \sqrt{n_{k_1} n_{k_2} n_{k_s}} G_{k_1 k_2} \sin(\alpha_{k_1} - \alpha_{k_2} - \alpha_{k_s}), \quad (2.2)$$

где  $(n_k, \alpha_k)$  — канонические переменные. В пренебрежении нелинейными членами это переменные действие — угол, поэтому для слаботурбулентного спектра можно получить функцию распределения по числам заполнения. Для этого предположим, что сохраняется энергия  $\epsilon = \sum n_k \omega_k = \sum \epsilon_k$ , и введем одночастичную функцию распределения

$$f(\epsilon_k) = c v(\epsilon_k), \quad (2.3)$$

где  $v(\epsilon_k)$  — площадь гиперповерхности, выделенной условием

$$\epsilon = N_0 T - \epsilon_k. \quad (2.4)$$

Формула (2.3) уже предполагает равномерное распределение по гиперповерхности (2.4). Формы гиперповерхности при различных  $\epsilon_k$  подобны, лишь размер по каждой оси уменьшен в  $(1 - \epsilon_k/N_0 T)$  раз. Отсюда

$$f(\epsilon_k)/f(0) = (1 - \epsilon_k/N_0 T)^{N_0} \xrightarrow{N_0 \rightarrow \infty} \exp(-\epsilon_k/T). \quad (2.5)$$

Число степеней свободы выпало из анализа. Поскольку оно велико и понижается интегралами движения ненамного, их можно учитывать независимо. Рассуждая, как и с энергией, учтем сохранение импульса и числа лемюрских волн:

$$f(n_k) = \exp[-(\omega_k - \omega_0 + k v_0) T^{-1}] n_k. \quad (2.6)$$

Переходя к средним числам заполнения, получаем модифицированный закон Рэлея — Джинса:

$$N_{kl} = \int n_k f(n_k) dn_k / \int f(n_k) dn_k = T / (\omega_k + \omega_0 + k v_0). \quad (2.7)$$

Распределение (2.7) характеризуется по числу интегралов движения тремя термодинамическими параметрами:  $T$ ,  $\omega_0$ ,  $v_0$ . Поскольку число звуковых волн не сохраняется, для звука

$$N_{ks} = T / (\omega_{ks} + k v_0). \quad (2.8)$$

Рассмотрим равновесие слабо турбулентного спектра с солитонами, играющими роль конденсированной фазы. Солитон — бесструктурное образование, полностью характеризуемое несколькими параметрами, поэтому (если расстояние между солитонами много больше их размера) число солитонных степеней свободы много меньше числа слаботурбулентных, так что энтропией солитонов можно пренебречь и считать, что вся она заключена в слаботурбулентном спектре. В этом смысле солитон — макроскопическая степень свободы, а свободные волны — микроскопические степени свободы. Из формулы (2.6) видно ( $S \sim \ln V$ ), что энтропия растет с ростом энергии и числа волн в слаботурбулентном спектре. Предположим, что полный импульс волн равен нулю, т. е.  $v_0 = 0$ . Переход некоторой части волн в солитон выгоден, если выделяемая при этом энергия увеличивает энтропию слаботурбулентного спектра в большей степени, чем ее уменьшает потеря части лемюрских волн. Термодинамическому равновесию соответствует равенство нулю вариации фазового объема, пропор-

диональной  $\delta(\varepsilon + N\omega_0) = 0$ . Учитывая, что в солитоне энергия есть функция числа волн,  $d\varepsilon(N)/dN = \Delta\omega_n$ , находим условие равновесия:

$$\Delta\omega_n = -\omega_0. \quad (2.9)$$

Это — естественный результат. Плотность волн в (2.7) обращается в бесконечность при  $\omega_k = -\omega_0$ , что соответствует конденсации волн в солитоне, имеющем именно такой сдвиг частоты  $\Delta\omega_n$ . Более интенсивные солитоны поглощают волны, а более слабые постепенно испаряются под ударами волн, что ведет к увеличению амплитуд солитонов при уменьшении их числа. Этот процесс улучшает применимость сделанных предположений: система все лучше разделяется на солитоны и слабонелинейные свободные волны. Слияние солитонов термодинамически выгодно, так как при этом выделяется энергия, уносимая свободными волнами, обратный же процесс практически не идет.

Конечномерные гамильтоновы системы не могут иметь аттракторы — этому препятствует сохранение фазового объема. В бесконечномерной системе начальный фазовый объем неизмеримо мал, поэтому система может притянуться к солитонному решению. Термином «статистический аттрактор» мы подчеркиваем, что в результате флуктуации солитоны могут распасться под ударами слабонелинейных волн.

Распад системы на солитон и свободные волны можно рассматривать как фазовый переход, например, капля — пар, но это равновесие отличается от равновесия капля — пар в двух отношениях:

1) солитон не имеет внутренних степеней свободы, а значит — температуры, химического потенциала и других термодинамических характеристик. К системам с солитонами нельзя применять доказательство невозможности существования фаз в одномерных системах [20];

2) энергия связи волн в солитоне, играющая роль теплоты испарения, сильно зависит от амплитуды солитона. Такая зависимость есть и в каплях жидкости, но там это поверхностный эффект, исчезающий с ростом капли.

Рост энергии связи с увеличением числа волн в солитоне приводит к эффекту росы, заключающемуся в уменьшении числа солитонов из-за испарения слабых при росте сильных. Этот эффект подтвердился при численном моделировании [21].

В приведенных рассуждениях специфика ленгмюровского солитона практически не использовалась; аналогичное рассмотрение можно провести и для других типов солитонов. Существует, например, большое количество солитонов на ветвях колебаний, дисперсия которых близка к звуковой:

$$\omega = kc_s + \omega_k; \quad \omega_k \ll \omega. \quad (2.10)$$

Для одномерных волн, распространяющихся в одну сторону, имеется два почти совпадающих интеграла движения — это энергия  $\varepsilon$  и импульс волн  $p$ , умноженный на скорость звука  $c_s$ . В ре-

зультате упрощения по методу КдФ обычно получают малую разность между интегралами движения  $\delta\epsilon$  (играющую роль гамильтониана) и грубо определенный интеграл, который можно рассматривать и как энергию, и как импульс. Для построения термодинамики достаточно зависимости энергии солитона от импульса  $\delta\epsilon(p)$ , которую будем считать известной. Термодинамически равновесное распределение свободных волн известно (2.6):

$$f(n_k) = \exp\{-[\delta\epsilon + p(c_s + v_0)]T^{-1}\}; N_k = T/(\omega_k + kv_0). \quad (2.11)$$

Здесь  $T$  и  $v$  — термодинамические параметры.

Варьируя  $\ln f$  с учетом связи между  $\delta\epsilon$  и  $p$ , находим условие равновесия

$$\delta\epsilon/\delta p = v_0. \quad (2.12)$$

Подведем итоги раздела. Термодинамическое рассмотрение показало, что солитон в статистическом отношении является притягивающим решением. В практически интересных ситуациях термодинамическое равновесие, как правило, отсутствует, однако разделение на солитоны и свободные волны все равно законно. Так, в обыденной жизни мы легко отличаем водяной пар от конденсата, хотя влажность обычно далека от 100% и никакого равновесия нет. Направление процессов также правильно указывается термодинамикой и в отсутствие равновесия: при столкновении солитонов типична передача части энергии более интенсивному солитону с испусканием свободных волн, а интенсивность солитонов растет за счет уменьшения их числа.

В приведенном анализе предполагалось, что интегралы движения, связанные с МОЗР [10], отсутствуют. Поскольку эти интегралы, вообще говоря, устраняются малыми гамильтоновыми добавками, появляющимися в следующих порядках теории возмущений, рассмотренные процессы могут идти, хотя и замедленно, и для систем, близких к точно интегрируемым. Для точно интегрируемых уравнений типа НУШ солитон не играет роли макроскопической степени свободы, и концентрации энергии в нем не происходит. Если, например, начальное условие для НУШ задать на всем пространстве, а нелинейная энергия — порядка дисперсионной, решение не распадется на солитоны и свободные волны. Точно интегрируемые уравнения можно находить методом Захарова — Шульмана (см. § 11). Методы анализа уравнений, близких к точно решаемым, рассматриваются в работах [22, 23] и цитируемой в них литературе.

### **3. Примеры получения упрощенных уравнений. Многомерные обобщения уравнения КдФ, уравнение МГД-волны, распространяющейся вдоль магнитного поля**

Получим упрощенные уравнения волн акустического типа в плазме. В отсутствие магнитного поля в плазме имеется лишь одна ветвь такого типа — ионно-звуковая волна. Магнитное поле существенно влияет на эту ветвь только на частотах меньших

или порядка ионной циклотронной частоты: появляются анизотропия и циклотронный резонанс. Все же при одномерном распространении ионно-звуковая ветвь описывается уравнением КдФ. Неодномерный же пакет ионно-звуковых волн в зависимости от эффекта магнитного поля описывается одним из двух обобщений КдФ на неодномерный случай [12, 14]. Кроме того, при наличии магнитного поля в плазме имеются непотенциальные ветви акустического типа: магнитозвуковая и альфвеновская. При распространении вдоль магнитного поля они отличаются друг от друга направлением вращения плоскости поляризации и знаком дисперсии. Однако под влиянием нелинейных эффектов, если они порядка дисперсионных, эти ветви зацепляются друг за друга [24, 25]. Это вызвано тем, что вдоль магнитного поля обе ветви имеют почти одинаковые скорости.

Рассмотрим сначала ионно-звуковые колебания, в которых электрическое поле потенциально.

Пусть температура ионов много меньше электронной температуры. Тогда уравнения движения и неразрывности ионов имеют вид

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} / \nabla \mathbf{v} = - (e/M) \nabla \varphi + \Omega [\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v}]; \quad (3.1)$$

$$\partial n_i / \partial t + \operatorname{div} n_i \mathbf{v} = 0. \quad (3.2)$$

Здесь  $\varphi$  — электрический потенциал;  $\Omega$  — циклотронная частота ионов;  $\boldsymbol{\zeta}$  — единичный вектор вдоль магнитного поля;  $n_i$  — плотность ионов. Электроны в ионно-звуковой волне распределены по закону Больцмана:

$$n_e = n_0 \exp(e\varphi/T). \quad (3.3)$$

Плотности электронов и ионов связаны уравнением Пуассона:

$$\Delta \varphi = 4\pi e (n_e - n_i). \quad (3.4)$$

Если магнитное поле пренебрежимо мало, то система (3.1) — (3.4) дает дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 / (1 + D^2 k^2); \quad \omega \gg \Omega; \quad (3.5)$$

$$c_s^2 = T/M; \quad D^2 = T / (4\pi e^2 n_0). \quad (3.6)$$

Выберем ось  $z$  в направлении распространения волнового пакета. Пусть характерные волновые числа и амплитуда скорости в пакете малы:

$$kD \ll 1; \quad k_{\perp}^2 \ll k_z^2; \quad v \ll c_s. \quad (3.7)$$

Второе неравенство (3.7) означает, что пакет почти одномерный. В процессе эволюции звуковые пакеты выходят на это неравенство из-за эффекта опрокидывания. С учетом (3.7) дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega \approx c_s (k_z - D^2 k_z^3 / 2 + k_{\perp}^2 / 2k_z). \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что если ищем все величины в пакете как функции вида

$$v = v(z - c_s t, t, x, y), \quad (3.9)$$



то согласно (3.7) зависимость от первого аргумента в (3.9) будет гораздо сильнее, чем от остальных. Поэтому в малых членах можно положить  $\partial/\partial t = -c_s \partial/\partial z$ , а зависимость от второго и третьего аргументов учитывать только в первом приближении. В (3.9)  $v$  —  $z$ -компонента скорости движения ионов в пакете, которая из-за потенциальности и ввиду второго неравенства (3.7) много больше других компонент. Ограничимся только квадратичными по нелинейности членами, считая их порядка дисперсионных и дифракционных поправок в (3.8). Отбрасывая члены более высокого порядка и переходя в систему отсчета, движущуюся вдоль оси  $z$  со скоростью  $c_s$ , из системы (3.1) — (3.4) при  $\Omega = 0$  получаем одно упрощенное уравнение. Надлежащим выбором единиц оно приводится к следующему безразмерному виду:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right) = \pm \Delta_{\perp} u. \quad (3.10)$$

Дифференцирование по  $t$  здесь проводится только по второму аргументу в (3.9). Для ионного звука в правой части уравнения получается минус, но имеются случаи, когда дисперсия положительна, и тогда в (3.10) стоит верхний знак. Так обстоит дело, например, с гравитационно-капиллярными волнами и с магнитно-звуковыми волнами, распространяющимися поперек магнитного поля в плазме с конечной температурой ионов. Дисперсионное уравнение для магнитного звука в этом случае имеет вид

$$\omega = c_A k_x (1 + D_m^2 k_x^2 + k_{\perp}^2 k_x^{-2}/2). \quad (3.11)$$

Здесь  $c_A$  — скорость Альфвена; магнитное поле направлено под углом оси  $z$ .

Длина дисперсии, входящая в (3.11), имеет вид

$$D_m^2 = (\beta/4 - m/M) r_A^2; \quad r_A = c_A/\Omega. \quad (3.12)$$

Таким образом, распространение магнитного звука под углом к магнитному полю тоже описывается уравнением (3.10), но в отличие от ионного звука с верхним знаком в правой части. Порядок всех членов в этом уравнении может быть одинаковым, и это не противоречит неравенствам (3.7).

Рассмотрим теперь трехмерный пакет ионно-звуковых волн при наличии магнитного поля, направленного вдоль оси  $z$ , следуя работе [12]. Пусть характерная частота в пакете много меньше ионной циклотронной частоты  $\Omega$ . Тогда дисперсионное уравнение, получаемое из (3.1) — (3.4), имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \omega &= c_s k_z (1 - k_z^2 D^2/2 - k_{\perp}^2 r_B^2/2); \\ k r_B &< 1; \quad r_B^2 = T M^{-1} \Omega^{-2}; \quad \omega \ll \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Почти во всех интересных случаях дебаевский радиус много меньше  $r_B$ . В этих условиях скорость колебаний ионов поперек

магнитного поля меньше, чем вдоль поля. Тогда из (3.1) приближенно

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{e}{M\Omega} [\zeta \nabla \varphi] - \frac{e}{M\Omega^2} c_s \frac{\partial}{\partial z} \nabla_\perp \varphi. \quad (3.14)$$

Считая  $e\varphi/T \ll 1$ , из (3.4) получаем

$$n_i \approx n_0 \left[ 1 + \frac{e\varphi}{T} + (e\varphi/T)^2/2 \right] - \Delta\varphi/(4\pi e). \quad (3.15)$$

Положим, что скорость пакета близка к  $c_s$ , а по направлению — к оси  $z$ . Подставим (3.14), (3.15) в уравнение непрерывности (3.2) и в  $z$ -компоненту уравнения (3.1). После этого выразим  $n_i$ ,  $\varphi$  приближенно через  $v_z$ , что даст одно замкнутое уравнение относительно  $v_z$ . После приведения к безразмерному виду и перехода к системе отсчета, движущейся вдоль магнитного поля со скоростью ионного звука  $c_s$ , получим [12]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \mp \Delta_\perp \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3.16)$$

Как и в (3.10), это уравнение в случае ионного звука имеет в правой части знак минус. Однако для некоторых мод в правой части может получиться знак плюс. Продольную координату измеряют в единицах  $D$ , поперечные координаты — в единицах  $r_B$ .

Таким образом, звуковые волны в изотропных средах описываются уравнением (3.10), а в анизотропных средах — уравнением (3.16). Эти уравнения в отсутствие зависимости от поперечной координаты переходят в уравнение КдФ и имеют одномерные солитонные решения. Методом, развитым в [14], нетрудно показать, что в неодномерном пространстве это решение устойчиво при нижних знаках в правых частях этих уравнений. При верхних же знаках одномерное солитонное решение неустойчиво относительно искривления фронта солитона. Такое различие вызвано тем, что при выборе верхних знаков фазовые скорости бесконечно малых возмущений вдоль оси  $z$  меньше скорости одномерного солитона; при нижних знаках фазовые скорости вдоль  $z$  произвольны.

Когда одномерное солитонное решение неустойчиво, уравнения (3.10), (3.16) допускают двумерные и трехмерные солитонные решения вида

$$u = f(z - A^2 t, r_\perp); \quad r_\perp^2 = x^2 + y^2. \quad (3.17)$$

При подстановке (3.17) уравнение (3.16) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение [12]:

$$r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} f = f - f^2; \quad r^2 = z^2 + r_\perp^2. \quad (3.18)$$

Для простоты считаем  $A=1$ . Уравнение (3.17) имеет солитонное решение, в котором  $f(0)=4$  и полуширина порядка 1,5 [12]. Подставляя (3.17) в (3.10), получаем уравнение

$$\Delta f = \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f^2, \quad (3.19)$$

которое существенно неоднородно. Поэтому его солитонное решение находится численно методом стабилизирующего множителя [15].

В двумерном случае, когда  $\partial/\partial y=0$ , уравнение (3.10) полностью интегрируемо [16]. В случае положительной дисперсии в этой работе найдено аналитическое выражение в виде двумерного солитона:

$$f=12(3-z^2+x^2)(3+z^2+x^2)^{-2}. \quad (3.20)$$

Это решение согласуется с численным решением, полученным ранее в [15]. Двумерные многосолитонные решения уравнения (3.10) также имеют простой вид [16]. Трехмерные решения этого уравнения и неоднородные решения уравнения (3.16) в аналитическом виде неизвестны.

Рассмотрим теперь распространение непотенциальных МГД-волн, частота которых меньше  $\Omega$ , вдоль магнитного поля [24, 25]. Дисперсионное уравнение этих волн имеет вид

$$\omega=c_A k_z(1\pm r_A |k_z|/2); \quad \omega \ll \Omega; \quad r_A=c_A/\Omega. \quad (3.21)$$

Знак плюс в (3.21) соответствует магнитозвуковой волне, электрическое поле в которой вращается в направлении циклотронного вращения электронов, нижний знак соответствует альфвеновской волне, в которой электрическое поле вращается в сторону вращения ионов. При распространении вдоль оси  $z$  у этих волн продольная компонента скорости возникает только из-за нелинейных эффектов, поэтому нелинейность в этом случае кубическая. Найдем эту нелинейность, пренебрегая дисперсионными эффектами, которые возникают в (3.21) при учете инерции ионов в законе Ома. Тогда уравнения МГД имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathbf{v}_\perp = \frac{H_z}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\perp; \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) v_z = -\frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial z} H_\perp^2; \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_\perp = \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v}_\perp H_z - v_z \mathbf{H}_\perp); \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho) = 0; \quad H_z = \text{const}. \quad (3.25)$$

В малых нелинейных членах можно положить  $\partial/\partial t = -c_A \partial/\partial z$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} v_z &= -c_A |h|^2; \quad \rho = \rho_0(1 + v_z/c_A); \\ c_A &= H_z(4\pi\rho_0)^{-1/2}; \quad \sqrt{2}h = (H_x + iH_y)/H_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Учитывая вид дисперсионной поправки в (3.21) и переходя в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $c_A$ , в пренебреженных малыми высшего порядка из (3.22)–(3.26) получаем

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \zeta} |h|^2 h + i(\partial^2 h/\partial \zeta^2) = 0; \quad \tau = \Omega t/2; \quad \zeta = z/r_A. \quad (3.27)$$

Это уравнение имеет солитонное решение вида

$$h = \sqrt{A/2} [\exp(-A\zeta) + i \exp(A\zeta)] \exp(-iA^2\tau) \text{ch}^{-2}(2A\zeta), \quad (3.28)$$

где  $A$  — амплитуда солитона.

В работе [26] показано, что уравнение (3.27) интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Сравнивая с дисперсионным уравнением (3.21), легко заметить, что (3.27) описывает смесь волн, вращающихся в сторону циклотронного вращения электронов (магнито-звуковая компонента) и в сторону вращения ионов (альфвеновская волна). Солитон (3.28) также представляет смесь этих ветвей. В пренебрежении дисперсией эти ветви образуют тороидальный солитон, бегущий со скоростью Альфвена (см. § 7).

#### 4. Численный метод получения солитонных решений

В большинстве случаев легко можно определить, имеет данное уравнение солитонное решение или нет. Сложнее показать, как будет спадать решение на бесконечности: степенным образом или экспоненциально быстро.

Общая математическая теория этих вопросов в случае неоднородных задач, если они относятся к неинтегрируемым, пока не разработана. Здесь изложим два численных простых приема нахождения солитонных решений, которые дают хорошие результаты на практике. Оба представляют собой модифицированный метод итераций (последовательных приближений). Уравнение солитона с помощью преобразования Фурье — Бесселя, функции Грина или как-нибудь иначе приводится к однородному нелинейному интегральному уравнению вида

$$f = \lambda I[f]. \quad (4.1)$$

Здесь  $I$  — нелинейный интегральный оператор, зависящий от координат;  $\lambda$  — некоторое собственное число задачи. Оно определяется из условия, что уравнение (4.1) должно иметь достаточно гладкое решение, стремящееся к нулю на бесконечности. Часто может быть, что такое решение имеется при произвольном  $\lambda$ . Например, рассмотрим уравнение солитона, получаемое из двумерного уравнения КП (3.10), которое имеет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) F = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F^2, \quad \sigma = \pm 1. \quad (4.2)$$

Представим  $F$  в виде интеграла Фурье:

$$F = \int f_{\mathbf{k}} \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}) d \mathbf{k}. \quad (4.3)$$

Тогда (4.2) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} f_{\mathbf{k}} &= G_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}; & G_{\mathbf{k}} &= k_x^2 / (k^2 + \sigma k_x^4); \\ N_{\mathbf{k}} &= \int f_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} d \mathbf{k}'. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Выше упоминалось, что наличие солитонного решения можно определить по простым признакам. Здесь это видно из выражения  $G$  в (4.4). Чтобы выражение (4.3) было уединенным, требуется уединенность  $f_{\mathbf{k}}$ . Но уравнение (4.4) имеет уединенное гладкое решение только в случае, если его ядро  $G$  гладкое и уединенное, а это достигается только при  $\sigma=1$ , т. е. в случае положительной

дисперсии. С первого взгляда кажется, что (4.4) решается методом итераций. Но оператор в правой части (4.4) оказывается нежимающим, и последовательность итераций, получаемая с помощью ЭВМ, расходится. Для подавления расходимости в работах [15, 27] разработан метод стабилизирующего множителя, с помощью которого найдено решение уравнения (4.2) в виде двумерного солитона. Метод состоит в следующем. Вместо (4.4) решается уравнение

$$f_{\mathbf{k}} = s G_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \equiv I[f]; \quad s = \left[ \int f_{\mathbf{k}}^2 d\mathbf{k} / \int f_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \right]^n. \quad (4.5)$$

Стабилизирующий множитель  $s$  эффективно изменяет степень нелинейности уравнения. Опытным путем установлено [15], что наилучшая сходимость достигается, когда степень нелинейности равна нулю, т. е. в данном случае, когда  $n=2$ . Уравнение (4.5) дает быстроходящуюся последовательность итераций по формуле

$$\left. \begin{aligned} f_{i+1} &= I[f_i]; \quad i=0, 1, 2, \dots; \\ \|f_{i+1} - f_i\| &\rightarrow 0; \quad \|f\|^2 = \int f_{\mathbf{k}}^2 d\mathbf{k}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

при этом одновременно стабилизирующий множитель  $s$  с ростом числа итераций стремится к 1.

В расчетах магнитных поверхностей в тороидальных плазменных ловушках применяется метод стабилизации сходимости последовательных приближений, предложенный в [28]. Приведем этот метод видоизмененным для однородных граничных условий (применительно к уравнениям солитонов). Исходим из уравнения (4.1), которое перепишем в виде

$$\varphi = \omega I [c\varphi / \|\varphi\|]. \quad (4.7)$$

Здесь  $\omega$ ,  $c$  — постоянные, которые подбираются вместе с начальным приближением  $\varphi_0$ . Норма  $\|\varphi\|$  определяется аналогично норме в (4.6). Проведя итерационную процедуру, аналогичную (4.6), приблизимся (если решение существует) к предельному выражению  $\varphi_\infty$  с соответствующей нормой. Сравнивая в этом случае (4.7) с уравнением (4.1), получаем решение последнего в виде

$$f = c\varphi_\infty / \|\varphi_\infty\|; \quad \lambda = \omega c / \|\varphi_\infty\|. \quad (4.8)$$

Этот метод выгоднее применять, когда нелинейный член в уравнении солитона не имеет определенной степени нелинейности и когда нужно искать собственное число задачи.

Если уравнение солитона сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, то эти методы по точности уступают другим. Если же нелинейное уравнение содержит производные высокого порядка или оно дано в частных производных, его лучше решать одним из этих методов.

## 5. Устойчивость солитонов и периодических волн

Следует ясно различать устойчивость в линейном приближении и «ляпуновскую» устойчивость. Если анализ, проведенный в ли-

нейном приближении, показал неустойчивость, — это надежный результат, который сохранится и при конечной, но малой нелинейности, а также при малой вариации членов в гамильтониане. Если же анализ показал устойчивость, результат может измениться при учете следующих членов разложения по амплитуде или иному параметру. Помимо метода линеаризации существует также подход, основанный на анализе законов сохранения. Если солитон реализует максимум какого-либо интеграла движения при фиксированных остальных интегралах, он устойчив и по отношению к конечным возмущениям. Устанавливать максимум можно, например, методом Захарова — Кузнецова (см. § 1). Если же солитон не реализует никакого максимума — это еще, вообще говоря, не означает неустойчивость: может оказаться, что существуют упущенные при анализе интегралы, которые запрещают распад солитона.

Можно сказать, что неустойчивость солитона лучше устанавливать методом линеаризации, а устойчивость — анализом законов сохранения.

Иногда солитон устойчив по причинам топологического характера, как, например, в работе [29]. Следует подчеркнуть, что одной топологической нетривиальности недостаточно для существования устойчивого солитона; результат зависит и от вида гамильтониана (см. § 15).

Исследование устойчивости солитонных решений обычно проводят в рамках уравнений, упрощенных по методу КдФ, что значительно облегчает анализ.

В случае недиссипативных систем об устойчивости солитонных решений можно судить по количеству и свойствам интегралов движения. Обычно у упрощенных уравнений этих интегралов больше, чем у исходного, поэтому их решение может быть устойчивым, в то время как точное уравнение не имеет устойчивых решений. Это связано с тем, что в предельных условиях, при которых обычно получается упрощенное уравнение, солитонные решения исходного уравнения слабонеустойчивы и при упрощающих предположениях эта неустойчивость теряется. Другими словами, если у исходного уравнения кроме точных интегралов движения имеются адиабатические инварианты, эти последние могут стать точными интегралами движения при упрощении по методу КдФ. По этой же причине у упрощенного уравнения никогда появляется солитонное решение, которому нет аналога в точных решениях исходного уравнения.

Одно из первых исследований устойчивости солитона было проведено в работе [30] для нелинейного уравнения Клейна — Гордона со степенной нелинейностью (НКГ):

$$\Delta\varphi - \partial^2\varphi/\partial t^2 = \varphi - (\varphi\varphi^*)^n\varphi. \quad (5.1)$$

Это уравнение сохраняет во времени интегралы — полную энергию  $H$  и заряд  $Q$ :

$$H = \int [ |\partial\varphi/\partial t|^2 + |\nabla\varphi|^2 + \varphi\varphi^* - (\varphi\varphi^*)^{n+1}/(n+1) ] d\mathbf{r}; \quad (5.2)$$

$$Q = i \int (\varphi^*\partial\varphi/\partial t - \varphi\partial\varphi^*/\partial t) d\mathbf{r}. \quad (5.3)$$

Осциллирующее солитонное решение уравнения (5.1) вида  $\varphi = f(\mathbf{r}) \exp(-iEt)$ , где  $f$  обращается в нуль на бесконечности так, что интегралы (5.2) — (5.3) схо-

дятся, имеет условный экстремум  $H$  при фиксированном  $Q$ . Вариационным методом в работе [30] доказываеся, что  $m$ -мерные солитонные решения в  $m$ -мерном пространстве устойчивы, если  $mn < 2$ , а частота  $E$  находится в интервале

$$mn/2 < E^2 < 1; n > 0. \quad (5.4)$$

Отсюда видно, что при росте амплитуды, что, как легко проверить, соответствует уменьшению  $E^2$ , солитон теряет устойчивость.

В пределе малой амплитуды и малости  $|\Delta\psi|$  (что в релятивистской теории соответствует малости кинетической энергии по сравнению с энергией покоя) на уравнения (5.1) получаем нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Для этого надо положить  $\psi = \psi(r, t) \exp(it)$  и, подставив это выражение в (5.1), пренебречь второй производной  $\psi$  по времени. НУШ имеет сохраняющиеся интегралы и солитонные решения аналогично НКГ. Как будет показано ниже, при аналогичном вариационном исследовании устойчивости солитонных решений НУШ условие устойчивости  $mn < 2$  сохраняется, однако устойчивость солитонных решений НУШ при нелинейности вида (5.1) вообще не зависит от амплитуды. Эти результаты были получены вариационным методом [31].

Приведем несколько изменений по сравнению с [31] исследование устойчивости 3-мерных солитонных решений НУШ. Это выявит ряд общих свойств, присущих аналогичным решениям других уравнений.

Нелинейное уравнение Шредингера с произвольной нелинейностью имеет вид

$$i\partial\psi/\partial t + \Delta\psi - U(\rho)\psi = 0; \rho = \psi\psi^*. \quad (5.5)$$

Здесь  $U$  — нелинейный потенциал НУШ.

Это уравнение имеет следующие интегралы движения. Число частиц

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}, \quad (5.6)$$

и гамильтониан

$$H = \int \left[ |\nabla\psi|^2 + \int U d\rho \right] d\mathbf{r}. \quad (5.7)$$

Сохранение гамильтониана следует из гамильтоновской формы записи уравнения (5.5)

$$i\partial\psi/\partial t = \delta H / \delta\psi^*. \quad (5.8)$$

Стационарные решения уравнения (5.5) в общем случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_0(\mathbf{r} - 2\mathbf{k}t) \sigma; \\ \sigma &= \exp\{i[-(E_0 - k^2)t + k\mathbf{r}]\}, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

где  $\mathbf{k}$  — произвольный постоянный вектор;  $E_0$  — постоянная энергия решения. Подстановкой (5.9) в (5.5) получаем уравнение, которому должна удовлетворять  $\psi_0$ :

$$\Delta\psi_0 = -[E_0 - U(\rho_0)]\psi_0; \rho_0 = \psi_0^2, \quad (5.10)$$

откуда видно, что  $\psi_0$  — действительная функция. Зависимость  $\psi_0$  от координат называют модуляцией по амплитуде, множитель  $\sigma$  дает модуляцию решения по фазе. Это уравнение может иметь решения в виде 3-мерных периодических волн и 3-мерных сферически симметричных солитонов. Исследуем солитонные решения (5.10). Для наличия солитонного решения необходимо иметь потенциальную яму в области малых  $\rho$ , что выполняется при условии, что  $U' < 0$  в этой окрестности. Штрих обозначает производную по  $\rho$ . Для удобства положим  $U(0) = 0$ .

В такой яме энергия солитона  $E_0$  отрицательна. Для удобства положим  $E_0 = -A^2$ . Солитонное решение устойчиво, если при таком решении гамильтониан  $H$  имеет условный минимум с условием постоянства числа частиц  $N$ . Тогда малые отклонения от такого решения не будут расти неограниченно из-за положительности соответствующего отклонения гамильтониана от минимума как функционала  $\delta\psi$ . Исследуем, при каком  $U$  гамильтониан может иметь относительный минимум на стационарных решениях (5.10). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы вторая вариация  $H$  была положительной при всех отклонениях  $\psi$  от стационарного решения, сохраняющих  $N$  постоянным. Действуя по Лагранжу, составим функционал:

$$W = A^2 N + H, \quad (5.11)$$

где  $A^2$  — множитель Лагранжа.

Приравнивание первой вариации функционала (5.11) нулю дает уравнение (5.10), где  $E_0 = -A^2$ . Возьмем вариацию в виде

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi; \quad \delta\psi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad (5.12)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$ , как и  $\psi_0$ , — действительные функции. Фазовый множитель в (5.9) не влияет на результат, и его здесь можно опустить. Подставляя (5.12) в (5.11) с учетом (5.10), получаем

$$\delta^2 W = \int (\varphi_1 L_1 \varphi_1 + \varphi_2 L_0 \varphi_2) d\mathbf{r}, \quad (5.13)$$

где  $L_0, L_1$  — операторы:

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= -\Delta + U_0 + A^2, \quad U_0 = U(p_0); \\ L_1 &= L_0 + U_0' p_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Здесь штрих обозначает производную по  $p$ . Условие постоянства  $N$  при вариации (5.12) в первом приближении дает

$$\int \psi_0 \varphi_1 d\mathbf{r} = 0. \quad (5.15)$$

Из сравнения уравнений (5.10) и (5.14) следует:

$$L_0 \psi_0 = 0; \quad (5.16)$$

$$L_1 \nabla \psi_0 = 0; \quad L_1 \partial \psi_0 / \partial A = -2A \psi_0. \quad (5.17)$$

Видно, что  $\psi_0$  является безузловой собственной функцией оператора  $L_0$ , откуда следует, что она есть функция основного состояния с минимальной энергией — собственным числом оператора. Поэтому для произвольной функции  $\varphi_2$  имеем

$$\int \varphi_2 L_0 \varphi_2 d\mathbf{r} \geq 0. \quad (5.18)$$

Теперь достаточно показать, что интеграл от первого члена в правой части (5.13) положителен, и тогда можно считать решение  $\psi_0$  устойчивым. Как видно из (5.14),  $L_1$  отличается от  $L_0$  отрицательной добавкой, поэтому если бы не условие (5.15), выражение (5.13) заведомо было бы отрицательным и солитон — неустойчивым.

Оператор  $L_1$  эрмитовский и имеет полную систему собственных функций  $\chi_E$  с собственными значениями  $E$ , удовлетворяющими уравнениям

$$L_1 \chi_E = E \chi_E; \quad \int \chi_E \chi_{E'} d\mathbf{r} = \delta(E - E'). \quad (5.19)$$



Разложим  $\psi_0$  и  $\varphi_1$  по этой полной системе ортогональных функций:

$$\psi_0 = \sum_E \psi_E \chi_E; \quad \varphi_1 = \sum_E \varphi_E \chi_E. \quad (5.20)$$

Тогда, подставляя эти разложения в (5.13), с учетом (5.18), (5.19) получаем

$$\delta^2 W \geq \sum_E E |\varphi_E|^2. \quad (5.21)$$

С учетом (5.19), (5.20) из (5.15) следует, что спектр функции  $\varphi$  не произвольный, а должен удовлетворять условию постоянства  $N$ :

$$\sum_E \varphi_E \psi_E = 0. \quad (5.22)$$

Согласно первому уравнению (5.17) оператор  $L_1$  имеет собственную функцию  $\nabla \psi_0$  с нулевым собственным значением  $E=0$ . Поскольку мы рассматриваем безузловое решение уравнения (5.16), то получается, что при  $E=0$  оператор  $L_1$  имеет решения с одним узлом. Отсюда следует, что  $L_1$  имеет одно безузловое решение  $\chi_g$  с собственным числом  $E=E_g < 0$ , а все остальные собственные значения положительны. Подставляя  $\varphi_g$  из (5.22) в (5.21), получаем

$$\delta^2 W \geq \Sigma' E |\varphi_E|^2 + (E_g / |\psi_g|^2) (\Sigma' \varphi_E \psi_E)^2. \quad (5.23)$$

Здесь  $\psi_g$  — коэффициент разложения  $\psi_0$  при функции основного состояния  $\chi_g$ . Заметим, что в виду ортогональности  $\psi_0$  к собственной функции состояния с  $E=0$ , которая согласно (5.17) есть  $\nabla \psi_0$ , имеем  $\psi_E|_{E=0}=0$ , и суммирование  $\Sigma'$  в (5.23) охватывает только состояние с  $E > 0$ .

Неравенство Гельдера дает:

$$(\Sigma' \varphi_E \psi_E)^2 \leq (\Sigma' E |\varphi_E|^2) (\Sigma' |\psi_E|^2 / E). \quad (5.24)$$

Подставляя (5.24) в (5.23), получаем более простое неравенство:

$$\delta^2 W \geq -c^2 [|\psi_g|^2 / E_g + \Sigma' |\psi_E|^2 / E]. \quad (5.25)$$

Здесь, с учетом того, что  $E_g < 0$ , величина  $c^2$  — положительная константа. Из последнего уравнения в (5.17) переходим к разложению по собственным функциям (5.19):

$$E \partial \psi_E / \partial A = -2A \psi_E. \quad (5.26)$$

С учетом этого равенства (5.25) принимает вид

$$\delta^2 W \geq \frac{c^2}{2A} \sum_E \psi_E^* \partial \psi_E / \partial A = \frac{c^2 \partial}{4A \partial A} \sum_E |\psi_E|^2. \quad (5.27)$$

Здесь суммирование проводится по всем собственным состояниям. С помощью первого разложения (5.20) и выражения для числа частиц (5.6) из (5.27) получаем условие устойчивости солитонного решения (условие положительности второй вариации от  $W$ ):

$$\partial N / \partial A > 0. \quad (5.28)$$

Это и есть критерий Вахитова — Колоколова. Его наглядный смысл состоит в следующем: для устойчивости достаточно, чтобы полная энергия солитона росла при росте его амплитуды.

Рассмотрим частный случай  $U = -\rho^n$ . Тогда, учитывая, что  $E_0 = -A^2$ , получаем  $N \sim A^{2/n-m}$ , где  $m$  — размерность пространства. Из (5.28) следует, что при степенном потенциале в  $m$ -мерном пространстве солитон устойчив, если  $mn < 2$ . В противном случае солитонное решение в зависимости от вида начального возмущения или коллапсирует, или расплывается. В работе [31] рассмотрены солитонные решения (5.10) при  $U = -\rho/(1+\rho)$ . Это нелинейный потенциал, в котором с ростом амплитуды нелинейность насыщается. При малых амплитудах  $A$  решение неустойчиво, так как насыщение не достигается и эффективно  $n = 1$ . С ростом  $A$  степень нелинейности  $n$  эффективно уменьшается и солитон должен стать устойчивым. На рис. 5.1 дается зависимость  $N$  от  $A^2$ . Видно, что при таком потенциале трехмерный солитон становится устойчивым при  $A^2 > 0,08$ .

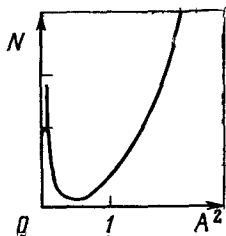


Рис. 5.1. Зависимость «числа частиц»  $N$  от амплитуды  $A$  в случае безузлового солитонного решения уравнения (5.16) с насыщающейся нелинейностью

Критерий (5.28) имеет, по-видимому, большую общность, чем в доказанном случае, например в случае сложных операторов и отклонения от сферической симметрии, хотя бывает, что интегралы движения имеются, но строгого доказательства устойчивости стационарных решений нет.

В работе [12] указывается, что в некоторых случаях наличие минимума  $N$  при постоянстве  $H$  можно доказать, используя неравенство Гельдера

$$\left( \int u^3 d\mathbf{r} \right)^2 \leq \int u^2 d\mathbf{r} \int u^4 d\mathbf{r} \quad (5.29)$$

и сравнительно мало известное неравенство (для двумерного и трехмерного пространства соответственно)

$$\int |\psi|^4 d\mathbf{r} \leq 2 \int |\psi|^2 d\mathbf{r} \int |\nabla\psi|^2 d\mathbf{r}; \quad (5.30)$$

$$\left( \int |\psi|^4 d\mathbf{r} \right)^2 \leq \int |\psi|^2 d\mathbf{r} \left[ (4/3) \int |\nabla\psi|^2 d\mathbf{r} \right]^3. \quad (5.31)$$

Этим способом в [12] доказана устойчивость найденного там же сферически-симметричного ионно-звукового солитона в магнитном поле [см. уравнение (3.16)]. Солитон неустойчив, если при таком же, как у него, значении  $N$  существует волновой пакет с меньшим, чем у солитона, значением гамильтониана  $H$ .

Рассмотрим, например, устойчивость трехмерного солитона в уравнении КП. Запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mu}{\partial t} + \left( \frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 - \sigma \frac{\partial^3 \mu}{\partial z^3} \right] = -\Delta_{\perp} \mu. \quad (5.32)$$

Здесь  $\sigma = \pm 1$  определяет знак дисперсии. Это уравнение сохраняет интегралы:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int (\partial \mu / \partial z)^2 d\tau; \\ H &= \int \left[ \sigma \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \right)^2 + (\nabla_{\perp} \mu)^2 + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^3 \right] d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

При  $\sigma=1$ , т. е. при положительной дисперсии, уравнение (5.32) имеет двумерные и трехмерные солитонные решения [15]. В трехмерном пространстве такие двумерные солитоны неустойчивы. Покажем, что и трехмерные солитонные решения (5.32) едва ли устойчивы.

Пусть трехмерное солитонное решение уравнения (5.32) имеет вид  $\mu = f(z-ct, r)$ , где  $r, z$  — цилиндрические координаты;  $c$  — скорость солитона. Введем новую функцию:

$$\Phi = (1+\xi)f\{(1+\eta)^2z, (1+\xi)(1+\eta)r\}. \quad (5.34)$$

Здесь  $\xi, \eta$  — некоторые малые параметры, моделирующие возмущения солитона, такие, что число частиц  $N$ , как видно из (5.33), остается таким же, как и у солитона. Поскольку интегралы (5.33) не меняются во времени, положим для простоты  $t=0$ . Подставляя (5.34) в  $H$ , видим, что гамильтониан есть функция  $\xi, \eta$  вида

$$\left. \begin{aligned} H &\approx H_0 + A_1\xi + A_2\eta + B_{11}\xi^2 + 2B_{12}\xi\eta + B_{11}\eta^2 + \dots; \\ A_1 &= A_2 = 0; \quad |\xi|, |\eta| \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Высшие степени разложения отброшены. Поскольку солитонное решение осуществляет условный экстремум гамильтониана, имеется еще второе условие, а именно  $N = \text{const}$ . С учетом (5.33) и (5.35) из него легко получаем

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= 10I; \quad B_{12} = -8I; \quad B_{22} = 2I; \\ I &= \int (\partial f / \partial r)^2 d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Таким образом, в трехмерном случае солитонное решение является лишь седловой точкой в пространстве функции и поэтому оно, видимо, неустойчиво. Приведенные рассуждения недостаточны для доказательства устойчивости солитона, потому что рассматриваются не все виды допустимых вариаций.

Проблеме устойчивости солитонов посвящен подробный обзор [32].

Обратимся теперь к устойчивости периодических волн. Хорошо известно, что монохроматическая периодическая волна, описываемая нелинейным уравнением Шредингера, модуляционно-неустойчива [19, 33, 34]. Хотя нелинейные периодические решения НУШ легко выражаются через эллиптические интегралы (см. § 1), их устойчивость долгое время не была исследована. Трудность связана с тем, что в этом случае собственными функциями линеаризованной системы являются не синусы, а функции Флоке, как и во всякой среде с периодически зависящими в пространстве свойствами. Если период нелинейной волны равен  $2\pi/k_0$ , то решение Флоке имеет вид

$$\psi(x, t) = u(x) \exp [i(kx - \omega t)], \quad (5.37)$$

где  $u(x)$  — периодическая в пространстве функция с периодом  $2\pi/k_0$ , которая может быть представлена в виде

$$u(x) = \sum c_n \exp (ink_0 x). \quad (5.38)$$

Если подставить так выбранное  $\psi(x, t)$  в линеаризованное уравнение Шредингера и собрать члены при одинаковых экспонентах, получится бесконечная система линейных уравнений для коэффициентов  $c_n$ , а для исследования устойчивости необходимо найти собственные значения бесконечной матрицы. Если ограничиться конечной, но достаточно большой матрицей, то ее собственные значения можно найти с помощью ЭВМ.

Весь описанный выше анализ выполнен в работе [35], где показано, что размер матрицы не влияет на неустойчивые корни, начиная с размера матрицы  $19 \times 19$ . Как и следовало ожидать, в периодической среде зависимости  $\omega(k)$  имеют зонную структуру. Интересным результатом этой работы является обнаружение устойчивой периодической волны. Устойчивость имеет место только для одного из трех типов периодических решений и не при всех значениях модуля эллиптической функции. Причина устойчивости может быть связана с полной интегрируемостью НУШ.

Экспоненциально малым оказался инкремент модуляционной неустойчивости для периодической решетки солитонов, сильно удаленных друг от друга; этого результата следовало ожидать.

## 6. Взаимодействие солитона со свободными волнами

В теории слабой турбулентности хорошо известна важная роль матричных элементов взаимодействия волн. В сильной турбулентности с участием солитонов роль матричных элементов играют коэффициенты поглощения свободных волн солитоном. Рассмотрим этот процесс на примере ленгмюровских солитонов, взаимодействующих с ленгмюровскими и звуковыми волнами. Рассмотрение будем вести на основе уравнений Захарова (2.1):

$$\left. \begin{aligned} 2i E_t + 3\omega_{pe} r_D^2 E_{xx} - \omega_{pe} (\delta n/n) E &= 0; \\ \delta n_{tt} - c_s^2 \delta n_{xx} &= (1/16\pi M) |E|_{xx}^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

которые имеют хорошо известное солитонное решение [36]. Для неподвижного солитона

$$E = (E_0/\text{ch } k_0 x) \exp \{i [(3/2) \omega_{pe} (k_0 r_D)^2 t]\}, \quad k_0 = eE/2\sqrt{6}T. \quad (6.2)$$

Скорость поглощения солитоном монохроматической ленгмюровской волны с излучением звука и скорость обратного процесса выбивания волн из солитона взаимно связаны. Аналогичная связь хорошо известна в теории слабой турбулентности — в конечном счете она следует из гамильтоновости уравнений. В состоянии термодинамического равновесия скорости прямого и обратного процессов очевидным образом совпадают:

$$N_{kl} v_{Tl} Q_l = N_{ks} v_{Ts} Q_s. \quad (6.3)$$

Здесь  $v_{Tl,s}$  — групповые скорости ленгмюровских и звуковых волн;  $Q_{l,s}$  — коэффициенты поглощения;

$$N_{kl} = T/(\omega_{kl} + \omega_0); \quad N_{ks} = T/\omega_{ks}. \quad (6.4)$$

Волновые векторы ленгмюровской и звуковой волны связаны распадным соотношением на частоты

$$(3/2)\omega_p(k_l r_D)^2 - (3/2)\omega_p(k_0 r_D)^2 = k_s c_s, \quad (6.5)$$

откуда по данному сдвигу частоты в солитоне находим  $\nu_{rl}$  и из (6.3), (6.4)

$$Q_l = (c_s/\nu_{rl}) Q_s. \quad (6.6)$$

Теперь достаточно вычислить  $Q_l$ ; для этого найдем интенсивность звука, излучаемого биениями падающей ленгмюровской волны и солитона.

Рассмотрим «дозвуковой» случай  $k_l, k_s \ll r_D^{-1} \sqrt{m/M}$ , когда длина волны излучаемого звука много больше размера солитона, что сильно упрощает задачу. В пренебрежении излучением звука амплитуда солитона осциллирует с частотой расстройки.

Подставляя такое решение из работы [37] в уравнение для звука, находим энергию, идущую на излучение звука, откуда получаем коэффициент поглощения

$$Q_l \cong 6\pi^2 \frac{(k_0 r_{De})^2}{k r_{De}} \sqrt{\frac{M}{m}} \left[ \left( \frac{k}{k_0} \right)^2 + 1 \right] \text{ch}^{-2} \left( \frac{\pi}{2} \frac{k}{k_0} \right) \quad (6.7)$$

и темп роста солитона

$$\dot{W} = \frac{9}{4} \pi \nu_{Te} (k_0 r_D)^2 \tilde{E}^2 \sqrt{\frac{M}{m}} \left[ \left( \frac{k}{k_0} \right)^2 + 1 \right] \text{ch}^{-2} \left( \frac{\pi}{2} \frac{k}{k_0} \right). \quad (6.8)$$

Здесь  $\tilde{E}$  — амплитуда падающей волны; ее искажением в зоне солитона пренебрегалось.

При  $k \ll k_0 \sqrt{M/m} (k_0 r_D)$  коэффициент поглощения (6.7) превышает единицу, что невозможно. Это означает, что поле падающей волны сильно искажается из-за поглощения звука.

Коэффициент поглощения звука находится из (6.6) и (6.7):

$$Q_s \cong 6\pi \frac{(k_0 r_D)^2}{k r_D} \sqrt{\frac{M}{m}} \left[ \left( \frac{k}{k_0} \right)^2 + 1 \right] \text{ch}^{-2} \left( \frac{\pi}{2} \frac{k}{k_0} \right) \frac{3\omega_p k_0 r_D}{c_s}. \quad (6.9)$$

В противоположном, „сверхзвуковом“ случае ( $k_0 r_0 \gg \sqrt{m/M}$ ) можно считать яму плотности солитона заданной, что упрощает рассмотрение — уравнение Шредингера с потенциалом  $\text{ch}^{-1} k_0 x$  решается в гипергеометрических функциях (при  $k=0$  решение совсем простое:  $E=A \text{th } k_0 x$ ). Однако темп такого процесса невелик, так как в сверхзвуковом случае длина волны излучаемого звука мала ( $k_s \gg k_0$ ), поэтому коэффициент поглощения экспоненциально мал. В этой ситуации нет смысла точно вычислять предэкспоненциальный множитель, и коэффициент поглощения, вычисленный в работе [38], имеет вид

$$Q_l \cong \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{k_0 r_D} \exp \left[ - \frac{m}{M(k_0 r_D)^2} \right]. \quad (6.10)$$

При сдвиге частоты в солитоне, большем, чем  $\omega_{pi}$ , звук вообще не способен унести энергию, выделяемую при поглощении ленгмюровской волны, поэтому в [38] рассматривался четырехволновой процесс, при котором два ленгмюровских кванта поглощаются солитоном и один излучается, унося избыточную энергию. Этот процесс идет через виртуальное ионно-звуковое возмущение, экспоненциально спадающее при  $n \rightarrow \pm \infty$ . Для этого процесса

$$Q_l = \frac{\tilde{E}^2}{8\pi n T} \left( \frac{m}{M} \right)^{(3/2)} \frac{1}{(k_0 r_D)^2 k r_D}. \quad (6.11)$$

Все приведенные результаты переносятся на электрозвуковые солитоны [7]; для этого достаточно в дисперсии ленгмюровских волн вместо тепловой скорости электрона подставить  $c/\sqrt{3}$ , здесь  $c$  — скорость света.

## 7. Взаимодействие солитонов с частицами

Понятие фазового резонанса волна-частица сохраняет свою роль и в случае солитонов. Нередко частицы можно описывать обычным уравнением квазилинейной диффузии, а для солитонов появляется система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изменение интегралов движения.

Если скорость частицы велика по сравнению с приращением скорости в поле солитона, а разброс фазовых скоростей волн в солитоне велик (это имеет место в высокочастотных солитонах), то можно пользоваться уравнением квазилинейной диффузии. Если же разброс фазовых скоростей отсутствует (как в трехволновом солитоне или волне ВЧ-давления четырехволнового солитона), то ситуация близка к затуханию Ландау линейной волны фиксированных амплитуды и фазы.

В качестве первого примера рассмотрим линейное по амплитуде волны взаимодействие быстрых электронов с единственным ленгмюровским солитоном [36]. Пусть солитон неподвижен и имеет электрическое поле

$$E_1 = A \operatorname{ch}^{-1}(k_0 x) \sin(\omega_p t + \alpha). \quad (7.1)$$

При пролете сквозь солитон электрона с начальной скоростью  $v_0$  он в первом приближении получает приращение скорости

$$\Delta v_1 = (e/m) \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x - v_0 t) dt \sim E_{\text{кр}} k_p = \omega_p v_0. \quad (7.2)$$

Таким образом, изменение скорости электрона пропорционально фурье-гармонике электрического поля, имеющей фазовую скорость, равную скорости электрона. Если теперь предположить, что солитонов много и их фазы случайны, то для функции распределения электронов  $f(v)$  можно написать уравнение диффузии с коэффициентом, пропорциональным  $v^2 \nu$ , где  $\nu$  — частота столкновений с солитонами. С учетом (7.2) такое уравнение совпадает с уравнением квазилинейной диффузии [39]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v}; \quad (7.3)$$

$$D(v) = (\pi e^2 / m^2) \int E_k^2 (\omega_k - kv) dk, \quad (7.4)$$

а факт вхождения волн в солитон не очень существен. Заметим, что для случая ленгмюровских солитонов большой амплитуды,  $v \gg \omega_l / k_0$ ,  $D \sim v^{-1}$  и зависит только от числа солитонов, но не от их амплитуды.

Воздействие электронов на солитон связано с модуляцией электронного пучка солитоном и дальнейшим воздействием модулиро-

ванного пучка на этот же солитон. Изменение энергии волн описывается уравнением

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \int \frac{mv^2}{2} \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v} dv. \quad (7.5)$$

Подставляя  $D \sim v^{-1}$  и интегрируя по частям, что законно, если  $f(v)$  описывает пучок, находим  $d\varepsilon/dt=0$  [36], т. е. пучок испытывает уширение, не усиливая солитоны. Если фазы соседних солитонов скоррелированы, то пучок, модулированный одним солитоном, способен усиливать соседний солитон, при этом  $d\varepsilon/dt > 0$  [40].

Может показаться, что учет корреляции фаз способен привести к появлению в уравнении диффузии члена с динамическим трением  $(\partial/\partial v)Bf$ ,  $B \neq \text{const}$ . Но это запрещено теоремой Лиувилля. Если взять в качестве начальной функции распределения  $f = \text{const}$ , то получим  $\partial f/\partial t = f \partial B/\partial v \neq 0$ , но этого не может быть, так как перестановка различных участков функции распределения с последующим усреднением ничего не изменяет.

Квазилинейный подход редко применим для описания взаимодействия частиц с ионно-звуковыми и другими трехволновыми солитонами (подробные разьяснения см. в [41]). При анализе таких задач полезно классифицировать частицы на захваченные, пролетные и отраженные. Похожая ситуация имеет место при взаимодействии ленгмюровских солитонов с медленными электронами и ионами через низкочастотные биения ленгмюровских волн. Как показано в [42, 43], солитоны тормозятся при отражении частиц от связанных с солитонами потенциальных горбов. При вычислении длины торможения следует учитывать сильное излучение звука тормозящимся солитоном (см. § 9). При обобщениях следует быть осторожным — в случае торможения солитона на ионах, например, надо учитывать существование двух типов ленгмюровских солитонов [44], один из которых представляет потенциальную яму и поэтому при равномерном движении не тормозится на ионах (все ионы пролетные).

Рассеяние частиц на биениях, созданных солитоном и свободной волной, способно приводить к захвату волны в солитон, но этот процесс, видимо, никем не рассматривался.

### 8. Излучение солитонами электромагнитных волн

Электростатические волны, составляющие солитон, могут сливаться, давая дипольное и квадрупольное излучения на кратных гармониках.

Рассмотрим излучение локализованного сгустка ленгмюровских волн на  $N$ -й гармонике, предполагая фазовую скорость малой по сравнению со скоростью света. В этом случае нелинейность можно считать электростатической, и изменение дипольного момента, связанное с обменом импульсом между электронами и ионами,

описывается формулой

$$\ddot{\mathbf{d}} = -\frac{e}{m} \ddot{\mathbf{p}}_e = \frac{e}{m} \ddot{\mathbf{p}}_i = -\frac{e^2}{m} \int n_i \nabla \varphi d^3 r, \quad (8.1)$$

где  $n_i$  — плотность ионов;  $\varphi = \sum \varphi_N \sin N(\omega_p t + \alpha_N)$ .

Интегрируя по частям, приходим к формуле

$$\ddot{\mathbf{d}} = (e/m) \int \varphi \nabla n_i d^3 r, \quad (8.2)$$

имеющей два очевидных следствия [45]:

1) в однородной плазме суммарный импульс, переданный ионам электростатическим полем, равен нулю, поэтому излучение квадрупольное;

2) учет вариации ионной плотности приводит к появлению дипольного излучения.

Квадрупольное излучение в фурье-представлении рассмотрено в известных работах по теории слабой турбулентности [46, 47], а в  $r$ -представлении — в [48, 49]. Дипольному излучению на слаботурбулентном языке соответствует процесс  $l+l \pm s \rightarrow t$ ; по сравнению с квадрупольным процессом  $l+l \rightarrow t$ -дипольный содержит дополнительную малость  $\delta n/n$ , где  $\delta n$  — вариация плотности в каверне. Дипольное излучение доминирует над квадрупольным при выполнении неравенства

$$\delta n/n > r/\lambda, \quad (8.3)$$

где  $r$  — характерный размер сгустка;  $\lambda$  — длина излучаемой волны. Квадрупольное излучение рассчитывалось в работе [49], дипольное можно оценить из (8.2) с учетом  $\varphi_N \simeq \varphi_1 (\tilde{v}/v_\phi)^{N-1}$ , где  $\tilde{v}$  — осцилляторная скорость электрона в волне;  $v_\phi$  — фазовая скорость волн, составляющих солитон. В приведенных выше формулах специфика солитона отсутствовала; она появляется, если учесть связь между  $\tilde{v}$ ,  $r$  и  $\delta n$ . В результате выражение для интенсивности излучения солитона на  $N$ -й гармонике принимает вид

$$\omega_N \approx \omega_p \left[ \frac{m \tilde{v}^2}{2} n r_D^3 \left( \frac{v_{Te}}{\tilde{v}} \right)^3 \right] \frac{v_{Te}^6}{c^5 \tilde{v}} \left[ 1 + \frac{c^2 \tilde{v}^2}{v_{Te}^4} \right] \left( \frac{\tilde{v}}{v_\phi} \right)^{2(N-2)}. \quad (8.4)$$

Здесь первый член во вторых квадратных скобках соответствует квадрупольному излучению, а второй — дипольному. Видно, что для интенсивных солитонов дипольное излучение доминирует и способно ограничивать их время жизни. При применении формулы (8.4) следует проявлять осторожность в двух отношениях. Во-первых, одномерный солитон не излучает, оценка (8.4) написана для солитона с одним характерным размером  $r$ . В магнитном поле солитон может быть дискообразным с большим размером  $R$ . В этом случае правую часть уравнения (8.4) надо умножить на  $(R/r)^4$ . Для применимости формулы необходимо выполнение неравенства  $R \ll \lambda$ . Во-вторых, дипольное излучение может обращаться в нуль, если подынтегральная функция в (8.2) нечетна. Поскольку  $\nabla n$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_5$  — нечетны, а  $\varphi_2$ ,  $\varphi_4 \dots$  — четны, то дипольная часть излучения на четных гармониках может обращаться в нуль.



Магнитное поле может оказывать влияние на излучение гармоник, однако для рассмотренных в работе [50] случаев это влияние невелико, и изложенный метод применим при описании излучения электронно-циклотронных солитонов [51].

В заключение упомянем одну распространенную ошибку — часто не замечают, что дипольное излучение плазмы с однородным ионным фоном отсутствует. Для дугообразного ленгмюровского солитона, например в нулевом приближении по  $r/R$ , электростатическое поле совпадает с полем одномерного солитона, а интеграл от него по объему в кажущемся противоречии с формулой (8.2) не равен нулю. Парадокс разрешается тем, что в первом приближении по  $r/R$  вокруг солитона в радиусе порядка  $R$  появляется «ореол» — находящееся вне солитона электростатическое поле, энергия которого мала, но с его учетом обращается в нуль интеграл  $\int E d^3r$ .

### 9. Высокочастотный солитон под действием медленно изменяющихся возмущений

Под действием внешних сил солитон может замедляться или ускоряться без разрушения, поэтому его движение можно описать обыкновенным дифференциальным уравнением, играющим роль уравнения Ньютона.

Одномерный высокочастотный солитон характеризуется двумя интегралами движения — импульсом и числом волн. Уравнения для изменения числа волн получены в § 6, 7; здесь же рассмотрим изменение скорости солитона. Сложность связана с наличием сильного излучения звука солитона, который может уносить почти весь переданный ему импульс. Следуя работе [52], рассмотрим ускорение ленгмюровского солитона на плавном градиенте концентрации на основе уравнения Захарова (2.1). Под положением солитона будем понимать положение центра инерции

$$x_0 \equiv \int x |E|^2 dx \left( \int |E|^2 dx \right)^{-1}. \quad (9.1)$$

Дифференцируя (9.1) по времени и интегрируя по частям, получаем

$$\int |E|^2 dx \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \int n \frac{\partial |E|^2}{\partial x} dx = - \int |E|^2 \frac{\partial n}{\partial x} dx. \quad (9.2)$$

В этом уравнении еще нет специфики солитона; оно описывает произвольный ленгмюровский пакет. Специфика солитона проявляется при расшифровке выражения для  $n(x, t)$ . Возмущение концентрации плазмы  $n(x, t)$  можно разбить на три части: солитонную (которая не дает вклада в ускорение), внешнюю и связанную с излучением звука. В качестве первого приближения выберем солитон, движущийся с заданным ускорением. Тогда в уравнении

$$n_{tt} - n_{xx} = |E^2|_{xx} \quad (9.3)$$

будет известна правая часть и можно восстановить  $n(x, t)$  излученного звука [52]:

$$n(x, t)_{\text{зв}} = \frac{E_0^2 v}{k_0} \left\{ \text{th } k_0 \left( x - \int v d\tau \right) \left[ \frac{1}{(1+v)^3} + \frac{1}{(1-v)^3} \right] + \frac{k_0 \left( x - \int v d\tau \right)}{\text{ch}^2 k_0 \left( x - \int v d\tau \right)} \frac{2v}{1-v^2} \left[ \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{1}{(1+v)^2} \right] \right\}. \quad (9.4)$$

Подставив  $n_{\text{зв}}$  в (9.2), найдем выражение для ускорения солитона:

$$\dot{v} = \frac{3}{2} v T_e \frac{\partial \ln n_0}{c x} - \frac{c_s^2 + 5v^2}{(c_s^2 - v^2)^4} v T_e^2 c_s^4 \frac{\delta n_0}{n_0} \dot{v}; \quad (9.5)$$

в этой формуле для справочных целей восстановлена размерность:

$$\delta n_0 = \frac{E_0^2}{16\pi M (c_s^2 - v^2)} \frac{(c_s^2 - v^2)^2}{c_s^4}; \quad k_0 = \frac{e E_0}{2 \sqrt{6} T_e \sqrt{1 - v^2/c_s^2}}. \quad (9.6)$$

Последний член в формуле (9.5) учитывает отдачу звука и доминирует, если амплитуда солитона не очень мала ( $\delta n/n \gg m/M$ ). В результате ускорения в неоднородной плазме солитон приближается к скорости звука лишь за бесконечное время ( $c_s - v \sim t^{-1/3}$ ).

Уравнение (9.5) независимо было получено также Торнхилом и Тер Хааром [53]. Если солитон находится в поле низкочастотной звуковой волны, то он попеременно ускоряется и тормозится. Результирующее среднее ускорение за много периодов было вычислено В. В. Куриным и Г. М. Фрайманом [54]; оно направлено в сторону движения звуковой волны:

$$\frac{d}{dt} M_{\text{эф}} v = \frac{1}{4} \frac{k}{\omega} R_{\text{отр}}^2 n_{\text{зв}}^2 \frac{1 - kv/\omega}{1 + kv/\omega}. \quad (9.7)$$

Характеристики звука, излученного ускоряющимся солитоном, подробно рассмотрены также в работе [55].

В формуле (9.5) в качестве причины, вызывающей ускорение солитона, можно подставить и передачу импульса за счет затухания Ландау. При этом, однако, начнет изменяться число волн в солитоне, что приводит к дополнительному излучению звука. Если солитон неподвижен, звук излучается вправо и влево симметрично; в обратном случае солитон ускоряется при затухании ленгмюровских волн. Это хорошо видно в ультрарелятивистском случае ( $c_s^2 - v^2 \ll c_s^2$ ), когда почти вся энергия находится в бегущей звуковой волне, в которую захвачены ленгмюровские волны, слегка уменьшающие общую скорость движения. Естественно, что по мере затухания ленгмюровских волн их скорость стремится к скорости звука. В этом предельном случае ускорение солитона под действием затухания впервые рассмотрел В. И. Карпман [56].

В общем случае произвольных скоростей ускорение солитона при изменении импульса и числа волн описывается

уравнением [52]

$$\dot{v} = \frac{dp}{dt} - \frac{v_{Te}^2}{c_s^2 - v^2} \left| \frac{\delta n_c}{n_c} \right| \left( \frac{v(c_s + 5v^2)}{c_s^2 - v^2} + 3\gamma v \right); \quad (9.8)$$

$$\gamma \equiv \frac{d}{dt} \ln \int |E|^2 dx. \quad (9.9)$$

Передача импульса солитону  $dp/dt$  нормирована на число волн.

## 10. Связанные многосолитонные состояния — мультисолитоны

Поправки к интегрируемым уравнениям типа КдФ или НУШ могут дать качественно новые эффекты, так что их иногда следует учитывать, даже если они малы. К таким поправкам относятся поправки к дисперсии. Если поправочный член ослабляет дисперсию, солитон может стать неустойчивым или излучающим. Последнее означает, что уравнение с поправкой может не иметь строго стационарных уединенных решений. Если поправка усиливает дисперсию, могут появиться мультисолитонные решения. Рассмотрим, например, уравнение КдФ с поправкой к дисперсии. В стационарном случае, когда решение уединенно и распространяется со скоростью  $c$ , это уравнение имеет вид

$$-cv + v^2/2 + \partial^2 v / \partial x^2 - \beta \partial^4 v / \partial x^4 = 0. \quad (10.1)$$

Скорость  $c$  определяет и амплитуду солитона. Представим  $v$  в виде интеграла Фурье:

$$v = \int v_k \exp(i k x) dk. \quad (10.2)$$

Тогда, преобразуя уравнение (10.1) по Фурье, получаем интегральное уравнение относительно  $v_k$ :

$$v_k = G_k N_k; \quad N_k = (1/2) \int v_{k'} v_{k-k'} dk'; \quad (10.3)$$

$$G_k = (c + k^2 + \beta k^4)^{-1}. \quad (10.4)$$

Отсюда видно, что, если  $\beta < 0$ , то интегральное уравнение (10.3) имеет ядро с особенностью при действительных  $k$ , и поэтому уравнения (10.1), (10.3) не могут иметь локализованных решений. При  $\beta > 0$  поправка усиливает дисперсию. Тогда, как видно из (10.1)—(10.4), при  $4\beta c > 1$ , т. е. при достаточно большой амплитуде, у солитонных решений появляются осциллирующие хвосты. В ямках на хвосте солитона возможен захват других солитонов с близкими скоростями (и амплитудами), так что возможно образование солитонных цугов, состоящих из большого числа почти одинаковых солитонов. Это явление было замечено В. В. Папко на радиотехнической аналоговой модели уравнения (10.1) [57].

Дисперсионные поправки к НУШ также приводят к аналогичным мультисолитонам, только солитоны в мультисолитоне КдФ бегут с одинаковой скоростью, а в мультисолитонах НУШ имеют одинаковую скорость перемещения и частоту осцилляции. Здесь

следует отметить, что в двумерном и трехмерном случаях НУШ и без поправок имеет сравнительно сложные солитонные решения. Эти решения зависят только от радиуса и многократно изменяют знак прежде, чем исчезают экспоненциально быстро на бесконечности [58] (рис. 10.1).

В работах [59, 60] был исследован интересный случай поправки к НУШ в виде нелокальной нелинейности, вызванной дисперсией низкочастотной (звуковой) компоненты, когда вместо НУШ рас-

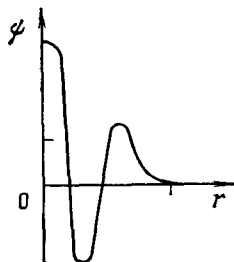


Рис. 10.1. Двухузловое солитонное решение уравнения  $(r^{-1}\partial/\partial r)(r\partial\psi/\partial r) = \psi - \psi^3$

сматривается система, состоящая из уравнений высокочастотной и низкочастотной компонент:

$$i\partial\psi/\partial t + \Delta\psi + n\psi = 0; \quad (10.5)$$

$$n - \beta\Delta n = |\psi|^2. \quad (10.6)$$

Здесь усиление дисперсии имеет место, если  $\beta > 0$ , т. е. при положительной дисперсии звука. Амплитуда  $\Phi$  стационарного решения (10.5)  $\psi = \Phi(r) \exp(iEt)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi + (n - E)\Phi = 0. \quad (10.7)$$

Как известно, при  $\beta = 0$  солитонные решения (10.6), (10.7) в двух- и трехмерных случаях неустойчивы. Пользуясь критерием Вахитова — Колоколова, можно показать, что при  $\beta > 0$  солитоны с достаточно большим значением  $E$  становятся устойчивыми. Примерно в этом же случае появляются решения в виде мультисолитонов. Согласно [60] мультисолитонные решения уравнений (10.6),

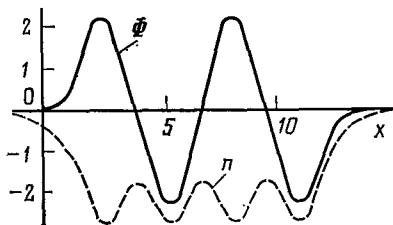


Рис. 10.2. Одномерное четырехсолитонное решение системы уравнений (10.6), (10.7):

— уровень  $\Phi$ ; ----  $n$

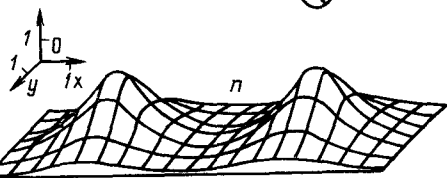
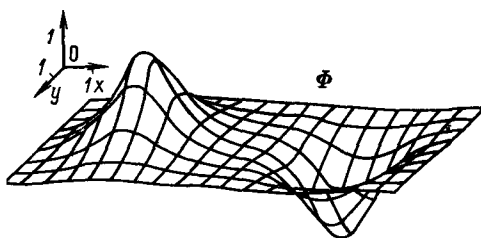


Рис. 10.3. Двумерное двухсолитонное решение системы (10.6), (10.7) для рельефов  $\Phi$

(10.7) появляются при  $\beta E > 1$ . На рис. 10.2 показано одномерное решение этой системы при  $\beta E = 4$ , на рис. 10.3 — двумерные решения этой системы в виде бисолитона, а на рис. 10.4 — в виде четверного солитона.

В случае ядерного вещества трехмерные уравнения (10.5) — (10.7) описывают взаимодействие нуклонов посредством потенциала Юкавы. Здесь мультисолитонным решениям соответствует ядро, состоящее из нескольких нуклонов. При этом систему урав-

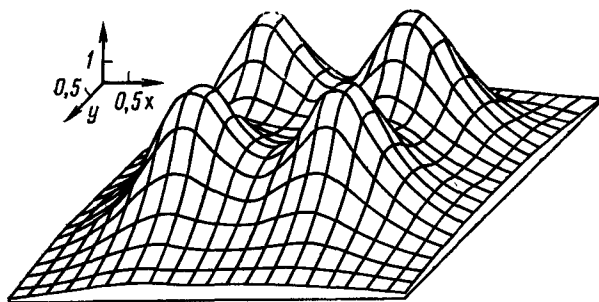


Рис. 10.4. Рельеф  $\eta$  двумерного четырехсолитонного решения системы (10.6), (10.7)

нений следует дополнить соответствующим числу нуклонов условием нормировки и принципом Паули. При больших энергиях ( $\beta E \gg \gg 1$ ) первым членом в (10.6) можно пренебречь, и тогда вместе с условиями нормировки получаем уравнение, описывающее кулоновское самовоздействие волновой функции. В этом случае уравнение (10.6) есть уравнение Пуассона [60].

### 11. Методы обнаружения скрытнолинейных уравнений

Многие уравнения, описывающие нелинейные волны, после преобразования приводятся к линейным. Такие уравнения обладают необычными свойствами, поэтому важно уметь их обнаруживать. Общего метода здесь нет, но есть довольно действенные испытанные правила.

Рассмотрим линейное уравнение диффузии

$$\varphi_t = \varphi_{xx}. \quad (11.1)$$

Если сделать нелинейную замену переменной вида

$$u = -2(\ln \varphi)_x, \quad (11.2)$$

то для  $u$  получается уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = u_{xx}. \quad (11.3)$$

Замена (11.2) была независимо предложена Коуллом и Хопфом; она позволяет дать полное аналитическое описание решений уравнения Бюргерса. Взяв простое линейное уравнение и сделав в нем нелинейную замену переменных, каждый может получить сколько угодно точно решаемых уравнений, но, как правило, они не будут

иметь физического смысла. Подстановка Коула — Хопфа и еще несколько имеющих физический смысл примеров содержатся в [61].

Таким образом, свойства скрытнолинейных уравнений — это свойства линейного «материнского» уравнения и нелинейного преобразования, с помощью которого замаскировали линейность.

Все известные скрытнолинейные уравнения, имеющие солитонные решения, относятся к классу решаемых методов обратной задачи (МОЗР). Сложность этого метода связана с тем, что для этих уравнений нелинейное преобразование является интегральным, а не локальным [10]. В таких уравнениях солитоны обладают свойством восстанавливать свою форму и амплитуду после прохождения друг сквозь друга. В одномерном случае такую проверку можно выполнить с помощью численного моделирования. Этот метод хорошо известен, так как именно с его помощью были заложены основы метода обратной задачи [62].

Аналитический метод обнаружения уравнений, решаемых МОЗР, создан В. Е. Захаровым и Е. И. Шульманом [63]. Бесконечные серии интегралов движения, встречающиеся в МОЗР, имеют нетривиальную квадратичную часть, поэтому они должны быть и в слабой турбулентности, описываемой кинетическим уравнением. Это означает, что на распадной поверхности, задаваемой в трехволновом случае уравнениями

$$k_1 + k_2 = k; \quad \omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) = \omega(k_1 + k_2), \quad (11.4)$$

может быть задана функция  $f(k)$ , для которой выполнены условия

$$f(k_1) + f(k_2) = f(k_1 + k_2) \quad (11.5)$$

и которая не является линейной комбинацией  $\omega(k)$  и  $k$ , т. е. существует независимый интеграл движения  $I = \int f(k) dx$ .

Размерность распадной поверхности в  $N$ -мерном случае  $2N - 1$ , тогда как  $f$  — функция  $N$  переменных. Это означает, что уже в двумерном случае уравнение (11.5), вообще говоря, не имеет решений ( $2N - 1 > N$ ). Такие дисперсионные зависимости, по терминологии [63], невырождены. Можно показать, что в двумерном случае существуют и вырожденные законы дисперсии. Следуя [63], параметризуем распадную поверхность соотношениями

$$\left. \begin{aligned} k_{x_1} &= \xi_1 - \xi_2; & k_{y_1} &= \xi_1^2 - \xi_2^2; \\ k_{x_2} &= \xi_2 - \xi_3; & k_{y_2} &= \xi_2^2 - \xi_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

Можно видеть, что теперь (11.5) удовлетворяется тождественно, если

$$f(k) = F(k_y/k_x + k_x) - F(k_y/k_x - k_x), \quad (11.7)$$

где  $F(\mu)$  — произвольная функция. Действительно,

$$F(k_1) = F(\xi_1) - F(\xi_2); \quad f(k_2) = F(\xi_2) - F(\xi_3); \quad f(k_1 + k_2) = F(\xi_1) - F(\xi_3),$$

откуда следует (11.5). В частности, выбирая  $F(\mu) = \mu^3$ , получаем дисперсионное уравнение  $\omega = k_x^3 + 3k_y^2/k_x$  для линейной части уравнения Кадомцева — Петвиашвили, решаемого МОЗР [14]. Обобщение этой параметризации указано С. В. Манаковым:

$$\left. \begin{aligned} k_{x_1} &= \xi_1 - \xi_2; & k_{y_1} &= a(\xi_1) - a(\xi_2); \\ k_{x_2} &= \xi_2 - \xi_3; & k_{y_2} &= a(\xi_2) - a(\xi_3). \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

Выбирая  $f(k_1) = b(\xi_1) - b(\xi_3)$ ;  $f(k_2) = b(\xi_2) - b(\xi_3)$ ;  $f(k_1 + k_2) = b(\xi_1) b(\xi_3)$ , убеждаемся в вырожденности при произвольных  $a(\mu)$ ,  $b(\mu)$ . В. Е. Захаров и Е. И. Шульман высказал гипотезу, что (11.8) — наиболее общая параметризация в двумерном случае. При  $N > 2$  вырожденные законы дисперсии неизвестны. В [63] рассмотрен также случай нескольких ветвей колебаний. Е. И. Шульман показал [64], что дисперсия использованной в § 2 системы ленгмюровские + звуковые волны невырожденна.

Методом Захарова — Шульмана показано, что дисперсия приведенных ниже уравнений невырожденна:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \psi_{yy} = -|\psi|^2\psi; \quad (11.9)$$

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = |\varphi|^2\varphi. \quad (11.10)$$

В этой связи удивительным выглядит результат численного моделирования уравнения (11.10) ([65, рис. 6]). Уравнение решалось в квадрате с периодическими граничными условиями, и в широком классе начальных условий решение с большой точностью возвращалось к начальному состоянию.

Одно из объяснений заключается в следующем. При решении в квадрате линейное уравнение

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0 \quad (11.11)$$

относится к числу уравнений с кратным спектром,  $\omega_{nm} = \omega_0(n^2 - m^2)$ , где  $n$  и  $m$  — целые числа. При решении такого уравнения через время  $T = 2\pi/\omega_0$  все собственные функции в точности восстанавливают фазу и произойдет возврат к начальному условию. Если теперь сделать замену  $\varphi(x, t) = Nv(x, t)$ , где  $N$  — произвольный оператор, не затрагивающий время, являющееся параметром, то и уравнение для  $v$  будет обладать свойством возврата. Возможно, что уравнение (11.10) относится к этому классу. Заметим, что (11.10) описывает двумерные квазигармоничные скалярные волны, дисперсионная поверхность которых  $\omega(k)$  имеет отрицательную кривизну, например гравитационные волны на глубокой воде [66].

Линейное двумерное уравнение Шредингера также обладает кратным спектром при решении в квадрате, поэтому интересно было бы проверить уравнение (11.9) на явление возврата.

## 12. Двумерные вихри в несжимаемой жидкости

В двумерной жидкости сохранение  $\text{rot } v$  вдоль траекторий приводит к существованию устойчивых вихрей; по этой же причине поток энергии направлен в большие масштабы, и в результате турбулентной эволюции возникают крупномасштабные устойчивые вихри.

В двумерной жидкости уравнение вихря принимает вид

$$d \text{rot } v / dt = 0. \quad (12.1)$$

С учетом несжимаемости это приводит к бесконечному набору интегралов движения

$$\int f(\text{rot } v) d^2r = \text{const}, \quad (12.2)$$

где  $f$  — произвольная функция. Большой набор интегралов затрудняет образование разрывов, для уравнения (12.1) даже доказано существование глобального по  $t$  решения [67].

Оценим поток энергии по масштабам, считая, что, как и в трехмерном случае, верна оценка  $\varepsilon \simeq v^3 r^{-1}$ , которую перепишем в виде  $\varepsilon \simeq (\text{rot } v_r)^2 r^2$ . В силу сохранения  $\text{rot } v$  вдоль траекторий  $\text{rot } v_r$  не может расти, и поток энергии в малые масштабы быстро убывает с уменьшением  $r$ . В этих условиях поток оказывается направленным в большие масштабы, и при достижении им внешнего размера турбулентной области могут появиться устойчивые вихри.

При исследовании устойчивости полезно использовать электростатическую аналогию, согласно которой  $\text{rot } v$  соответствует сохраняющемуся заряду  $\rho$ . Тогда интегралы, связанные с инвариантностью относительно сдвигов по времени, по пространству и относительно поворотов, имеют вид

$$H = \int \rho(r_1) \rho(r_2) \ln |r_1 - r_2| d^2 r_1 d^2 r_2; \quad (12.3)$$

$$Z = \int \rho(r) r d^2 r; \quad (12.4)$$

$$I = \int \rho(r) r^2 d^2 r. \quad (12.5)$$

Заметим что такая аналогия имеет и вполне непосредственный физический смысл — по таким законам движется замагниченная однородная плазма, когда основным членом в гамильтониане является энергия электростатического поля, а главный вклад в импульс дает вектор Пойнтинга  $\mathbf{P} = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ . Эти условия реализуются при  $\mathbf{B}^2/8\pi \gg \rho c^2$ . Практически такие условия встречаются редко.

**Пример 1.** Из приведенной аналогии очевидно, что круглые вихри с монотонно спадающим до нуля ротором скорости устойчивы, поскольку реализуют абсолютный максимум энергии. Действительно, энергия зарядов одного знака максимальна, когда они прижаты друг к другу как можно теснее, а участки жидкости с наибольшей плотностью заряда находятся ближе к центру. Этот пример известен давно [68]. Заметим, что хотя в приведенном примере  $\text{rot } v$  локализован, скорость медленно убывает на бесконечности, так что энергия и момент импульса расходятся. Однако выражения (12.3), (12.5) дают конечные значения, они как бы перенормированы, поэтому они удобнее.

**Пример 2.** Рассмотрим два круглых вихря из примера 1 с характерным размером  $r$ , различающихся лишь знаком ротора скорости. По отдельности они устойчивы, учет интеграла (12.4) означает, что сохраняется расстояние  $R$  между центрами заряда вихрей и дипольный момент. Если теперь положить  $r \ll R$ , то энергия взаимодействия вихрей будет мала по сравнению с самовоздействием каждого вихря, и максимум энергии реализуется на почти круглых вихрях со степенью эллиптичности  $r/R$ . Такой двойной вихрь движется по прямой, перпендикулярной дипольному моменту.

Аналитическое решение для вихря такого типа содержится в [69]; его устойчивость не исследована ( $r \simeq R$ ). Подобные вихри, но со ступенчатой завихренностью ( $\text{rot } v = \pm 1, 0$ ), исследовались в [70]; по результатам численного моделирования вихри из приведенного там примера устойчивы.



Максимум энергии из примера 2 — не абсолютный, в чем убеждает следующий контрпример. Разделим один из вихрей пополам и перенесем половину вокруг оставшегося вихря, после чего будем раздвигать вихри, сохраняя «дипольный момент». Из формулы (12.3) видно, что энергия при этом логарифмически растет.

Пример 3. Устойчивые вихри из примеров 1, 2 имели локализованный ротор, скорость же убывала с расстоянием лишь степенным образом. Если потребовать сохранения момента (12.5), то можно построить устойчивый вихрь, в котором за некоторым радиусом скорость равна нулю. Таков круглый вихрь со ступенчатым распределением завихренности  $\rho = \rho_1$  при  $0 < r < r_1$ ,  $\rho = \rho_2$  при  $r_1 < r < r_2$ ,  $\rho = 0$  при  $r > r_2$ . При условии  $\text{rot } v, r_1^2 = -(r_2^2 - r_1^2) \text{rot } v_2$  скорость обращается в нуль при  $r > r_2$ ; полагая  $r_2 \gg r_1$ , можно доказать устойчивость. Максимум энергии, реализуемый этим вихрем, также не абсолютный, в чем можно убедиться построением контрпримера.

При построении примеров 2, 3 кроме энергии сохраняли либо (12.4), либо (12.5). Потребовав их одновременного сохранения, можно получить и более богатый набор устойчивых вихрей.

Рассмотрим процесс рождения вихрей. Пусть в неограниченной области задано турбулентное пятно масштабом  $L$ . В результате перекачки по масштабам через время  $\tau = L/v$  система должна распасться на глобальные устойчивые вихри масштабом  $L$ , существование которых показано. В таких вихрях на фоне усредненного ротора существуют мелкомасштабные осцилляции  $\text{rot } v$ , которые, однако, несущественны — в них содержится мало энергии. Ситуация здесь напоминает положение с бесстолкновительным затуханием Ландау в уравнении Власова. Рождение глобальных вихрей из мелкомасштабной турбулентности наблюдалось в численных экспериментах [71], что навело Глэза на мысль о существовании аттрактора [72]. Как показано в § 2, для бесконечномерных систем гамильтоновость не является препятствием для существования статистических аттракторов, поэтому не нужна предпринятая Глэзом попытка объяснить рождение глобальных вихрей малой вязкостью, не приводящей к полному затуханию турбулентности, но разрешающей существование аттракторов. Малая вязкость действительно сглаживает мелкомасштабные осцилляции  $\text{rot } v$ , но глобальные вихри рождаются и без вязкости. В отличие от солитонов (см. § 2) для двумерной жидкости не удастся провести корректное термодинамическое рассмотрение. Этот вопрос обсуждается в § 13.

### 13. Проблемы конечномерных аппроксимаций

Для термодинамического описания турбулентности необходимо вводить меру. На функциональных пространствах не существует меры, поэтому ее вводят с помощью конечномерных аппроксимаций. К сожалению, эти аппроксимации нередко плохо аппроксимируют исходную систему. В частности, результат зависит от выбора аппроксимации.

В § 2 была использована термодинамика для анализа асимптотического поведения нелинейных волн. Аналогичный подход ис-

пользуется для описания эволюции в уравнении Власова [73] и двумерной жидкости [74, 75]. У уравнения двумерной жидкости и уравнения Власова много общего: в обоих случаях вдоль траекторий сохраняется некоторая величина, сходно вводится гамильтонова структура [76], сходны проблемы аппроксимации, поэтому рассмотрим подробно только гипотезу Линдена — Белла [73] — в двумерной жидкости проблемы те же самые.

Суть гипотезы заключается в том, что функцию распределения  $f(r, v, t)$  можно разбить на макрочастицы или баллистические моды. Если макрочастицы считать жесткими, то уравнения их движения конечномерны гамильтоновы, и в результате взаимодействия макрочастиц устанавливается равновесное распределение. При учете только кинетической энергии устанавливается фермиевское распределение, если размеры макрочастиц одинаковы. В предельном случае размеров макрочастиц, малых по сравнению с расстоянием между ними, устанавливается максвелловское распределение.

Недостаточность этих рассуждений в следующем. Пока на характерном размере функции распределения укладывается много макрочастиц, аппроксимация дает удовлетворительную точность. Однако термодинамическое равновесие устанавливается в результате парных взаимодействий макрочастиц, когда характерный размер функции распределения порядка расстояния между макрочастицами. В этих условиях аппроксимация незаконна, что проявляется, например, в следующем факте. Если взять макрочастицы  $N$  размеров, то возникнет  $N$ -максвелловское распределение

$$f(v) = \sum_{i=1}^N d_i \exp[-(v/v_i)^2]. \quad (13.1)$$

Поскольку при столкновении макрочастицы дробятся, распределение утрачивает всякую универсальность. Дополнительной трудностью является стремление времени релаксации к бесконечности при измельчении макрочастиц. Таким образом, для появления универсальных распределений в уравнении Власова не имеется достаточных оснований. По этой же причине недостаточно обоснована теория термодинамики двумерной турбулентности, построенная в работах [74, 75] с помощью аппроксимации точечными или конечными вихрями.

При попытке аппроксимировать двумерную завихренность фурье-гармониками, как в [72], возникает проблема учета бесконечного набора интегралов замороженности (12.2), а при построении термодинамики надо учитывать все интегралы. Тем не менее термодинамика турбулентности двумерной жидкости верно указывает на тенденцию образования крупномасштабных вихрей, а полученные с помощью термодинамики [75] вихри автоматически устойчивы, а потому интересны.

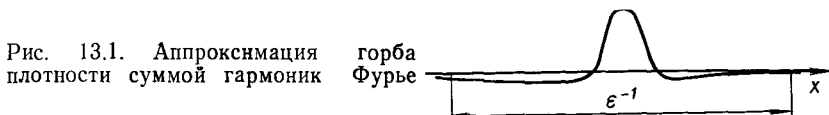
Трудности с аппроксимацией встречаются не только при построении термодинамики. Рассмотрим линейный звуковой пакет в виде бегущего горба плотности. Нетрудно убедиться, что помимо

квадратичного по амплитуде импульса такой пакет имеет и линейный по амплитуде импульс

$$p_1 = c_s \int n(x) dx, \quad (13.2)$$

где  $n(x)$  — вариация плотности. Аппроксимируя пакет суммой фурье-гармоник, у которых  $|k| \geq \epsilon > 0$ , обнаруживаем, что для суммы  $p_1 = 0$ , так как  $\int \sum_c n_k dx = 0$ . Это связано с существованием

«ореола» у суммы фурье-гармоник (рис. 13.1). Таким образом, импульс суммы фурье-гармоник не сходится к импульсу пакета при



$\epsilon \rightarrow 0$ . В теории слабой турбулентности гармоника  $k=0$  отсутствует, квадратичный и линейный импульсы сохраняются независимо. В сильной турбулентности гармоника  $k=0$  принципиально присутствует в солитоне, поэтому, по-видимому, сохраняется лишь сумма линейного и квадратичного импульсов, что следует учитывать при анализе торможения солитонов на частицах (см. § 7). Возможно, что это вводит новые эффекты.

#### 14. Дрейфовые вихри в атмосфере и плазме

В данном параграфе рассмотрены солитоноподобные вихри на ветвях волн Россби в атмосфере планет, потенциальных дрейфовых волн и желобковых волн в плазме и электронной жидкости.

Экспериментальные данные показывают, что даже в спокойной с виду плазме перенос теплоты нельзя объяснить парными столкновениями частиц. По-видимому, основная часть теплоты переносится конвекцией, возможно, из-за образования дрейфовых вихрей, рассмотренных ниже.

Начнем с более наглядного случая мелкой атмосферы, которую можно представить в виде несжимаемой жидкости на поверхности вращающейся планеты. Если размер возмущений много больше глубины жидкости  $H$ , а частота много меньше параметра Кориолиса  $\Omega = 2\omega_0 \sin \alpha$ , где  $\omega_0$  — угловая частота вращения планеты,  $\alpha$  — широтный угол, то эти возмущения описываются одним безразмерным уравнением

$$\partial q / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla q = 0; \quad v_x = -\partial \psi / \partial y; \quad v_y = \partial \psi / \partial x; \quad (14.1)$$

$$q = \Delta \psi - \psi - \beta y + q_N; \quad \beta = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{y=0} \ln(H_0 / \Omega). \quad (14.2)$$

Здесь  $\psi$  — относительное возмущение глубины жидкости;  $q$  — обобщенная завихренность; ось  $x$  направлена на восток, ось  $y$  — на се-

вер, длина измеряется в единицах длины Россби  $r_R = \sqrt{gH_0}/\Omega$ , время — в единицах  $1/\Omega$ ;  $g$  — векторная сумма гравитационного и центробежного ускорений;  $H_0$  — невозмущенная глубина;  $\beta$  — скорость Россби. Если размер возмущения невелик, т. е.  $|\Delta\psi/\psi| \gg 1$ , то можно положить  $q_N = 0$ . Тогда (14.1) называют обыкновенным геострофическим уравнением. В работе [77] показано, что в обратном случае необходимо вводить поправку, которая для жидкости равна:

$$q_N = -\beta_N y \psi - \beta' y^2 / 2, \quad (14.3)$$

где

$$\beta_N = -\frac{\partial}{\partial y} \ln \Omega; \quad \beta' = \frac{\Omega}{H_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{H_0}{\Omega}.$$

Уравнение (14.1) справедливо в достаточно узкой зоне широт  $|\beta y| < 1$ , где применимо разложение по  $y$  — отклонению от заданной широты.

Внутренние волны, которые возможны на границе раздела между двумя жидкостями с близкими плотностями, если длина волны много больше глубины жидкостей и если имеется сила Кориолиса, также описываются уравнениями (14.1)–(14.3) [78], только  $g$  надо заменить  $g\delta\rho/\rho$ , где  $\rho$  — плотность;  $\delta\rho$  — разность плотностей нижней и верхней жидкостей. Уменьшается также характерный размер дисперсии. В этой же работе дается доказательство устойчивости решений в виде солитонов-антициклонов методом, изложенным в [12].

Уравнения (14.1)–(14.3) описывают и потенциальные дрейфовые волны в плазме [77], только в этом случае надо положить  $\psi = e\varphi/T_e$ , где  $\varphi$  — электрический потенциал;  $T_e$  — температура электронов;  $\Omega$  — циклотронная частота ионов (считается постоянной);  $\beta = \partial \ln n_0 / \partial y$ ;  $\beta_N = \partial \ln T_e / \partial y$ ,  $\beta' = (1/n_0) (\partial^2 / \partial y^2) n_0$ . За единицу длины принимается ларморовская длина:  $r_B^2 = T_e / (M\Omega^2)$ , где  $n_0$  — средняя плотность;  $M$  — масса ионов. Это уравнение получается в предположении малости частоты по сравнению с  $\Omega$  и волнового числа по сравнению с  $1/r_B$ . Кроме того, фазовая скорость вдоль магнитного поля должна быть много меньше тепловой скорости электронов и скорости Альфвена и много больше тепловой скорости ионов. Характерный размер вдоль магнитного поля много больше поперечного размера. В таких условиях плотность электронов распределена по Больцману:  $n = n_0(y) \exp\{e\varphi/T_e(y)\}$ . Это выражение считается равным плотности ионов и подставляется в уравнение неразрывности ионов, выведенном в [88, формула (7.44)]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{dt} + \frac{\partial n v_z}{\partial z} + \frac{nc}{B\Omega} \frac{d\Delta\varphi}{dt} + \frac{c}{B\Omega} \operatorname{div}(n\mathbf{v}_L \cdot \nabla) \nabla\varphi &= 0; \\ \frac{dp_i}{dt} &= 0; \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_E \cdot \nabla; \quad \mathbf{v}_E = \frac{c}{B} [\zeta, \nabla\varphi]; \\ \mathbf{v}_L &= \frac{[\zeta, \nabla p_i]}{nM\Omega}; \end{aligned} \right\} \quad (14.4)$$

где  $p_i$  — давление ионов;  $\zeta$  — единичный вектор вдоль оси  $z$  и магнитного поля, что и дает выражение (14.1), если пренебречь производной по  $z$ .

Согласно линейной теории [1, 88] дрейфовые волны в плазме легко возбуждаются при различных неравновесных распределениях частиц, если имеется механизм локализации дрейфовых волн в области неустойчивости. Покажем, что нелинейность в (14.1) — (14.3) приводит к такой локализации [77].

Стационарное решение (14.1), бегущее вдоль  $x$  со скоростью  $u$ , имеет вид

$$q = F(\psi + uy); \quad \psi = \psi(x - ut, y), \quad (14.5)$$

где  $F$  — произвольная функция. Если выбрать  $F$  в виде квадратичной функции с соответствующими коэффициентами, то из (14.5) получим

$$\Delta\psi = (1 - \beta/u)\psi - \psi^2\beta_N/2u + (\beta' - u\beta_N)y^2/2. \quad (14.6)$$

Это уравнение имеет «круглое» солитонное решение, если  $u = \beta'/\beta_N$  и если амплитуда  $a^2 = 1 - \beta/u$  положительна. Из условий применимости уравнения (14.1) следует, что амплитуда должна быть много меньше 1. Отсюда видно, что стационарные дрейфовые солитоны могут возникнуть не всюду, а только на определенных участках. При этом все параметры солитона зависят от локальных параметров среды. Если последний член (14.6) отличен от нуля, но мал, то солитон испытывает слабую накачку или затухание, которое может быть скомпенсировано соответственно диссипацией или подкачкой за счет кинетической или другой неустойчивости в плазме. Как показано в [89], слабый зональный поток во вращающейся жидкости также может скомпенсировать эту нестационарность. График решения (14.6) без последнего члена приведен в [78]. Размер солитона порядка  $1/a$ . Если  $a^3/u > 1$ , то жидкость в области максимума солитона переносится вместе с солитоном. Это аналогично наличию в волне захваченных частиц [3, 4].

Уравнение (14.1) сохраняет во времени интегралы

$$\left. \begin{aligned} E &= \int [(\nabla\psi)^2 + (1 + \beta_N y)\psi^2] ds; \quad ds = dx dy; \\ Y &= \int y q ds; \quad I_f[D] = \int_b^b f(q) ds. \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

Здесь  $D$  — произвольная область, граница которой перемещается по (14.1) со скоростью  $v$ ;  $f$  — произвольная функция. Решение (14.5) дает минимум функционала — суммы интегралов (14.7), с соответствующими множителями Лагранжа. Поэтому решение устойчиво [89]. В этой же работе доказывается устойчивость солитонных решений, найденных в [80]. Такие решения имеют место, если в (14.2) можно пренебречь поправкой  $q_N$ . Тогда у (14.1) появляется новый важный интеграл  $X = \int (x - \beta t) q ds$ . Доказатель-

ство проводится вариационным методом. Вводится сохраняющийся во времени функционал

$$W = \int (Gq^2 + \psi q + 2uyq) ds, \quad q_N = 0, \quad (14.8)$$

где  $G = (1 + k^2)^{-1}$  в области  $D$ , перемещающейся со скоростью  $v$ ; вне этой области  $G = (1 - \kappa^2)^{-1}$ , где  $\kappa^2 = 1 - \beta/u$  (14.8) имеет экстремум на решениях уравнений

$$\Delta\psi + k^2\psi = (\beta - u - k^2u)y; \quad (x, y) \in D; \quad (14.9)$$

$$\Delta\psi - \kappa^2\psi = 0; \quad (x, y) \notin D. \quad (14.10)$$

Согласно уравнению (14.1) допускаются только такие вариации, которые сохраняют площадь  $D$ . Это приводит к  $\psi + uy = \text{const}$  на границе  $D$ , т. е. граница перемещается со скоростью  $u$ . Сама область  $D$  оказывается кругом с произвольным радиусом  $r_0$ . Решение (14.9) равно  $\psi = a_1 J_0 + b_1 J_1 y/r + cy$ , где  $J_0, J_1$  — функции Бесселя от  $kr$ . Вне  $D$  решение (14.10) имеет вид:  $\psi = a_2 K_0 + b_2 K_1$ , где  $K_0, K_1$  — функции Макдональда от  $\kappa r$ .

Условие непрерывности скорости приводит к связи между коэффициентами  $a, b, c$  и к дисперсионному уравнению [80]

$$-kJ_1(kr_0)/J_2(kr_0) = \kappa K_1(\kappa r_0)/K_2(\kappa r_0), \quad (14.11)$$

которое связывает параметры решения друг с другом. Для устойчивости решения достаточно  $\delta^2 W > 0$ . Согласно [89] при ограниченном классе вариаций  $\delta q$ , которые не меняют интегралы движения  $X, Y, \int_D q ds$  и для которых  $\delta(\mathbf{v} \cdot \nabla q)$  всюду конечно, это усло-

вие выполняется, если  $a_1 \neq 0$ , т. е. когда  $q$  терпит разрыв на границе. В случае если  $a_1 = 0$ , т. е. когда решение антисимметрично по  $y$  и  $q$  непрерывно, выполняется лишь условие  $\delta^2 W \geq 0$ .

В [77] указано, что дрейфовые солитоны можно создать в мелкой жидкости во вращающемся сосуде с параболоидальной формой дна, волны в которой также описываются уравнением (14.1). В [79] в таком сосуде были получены солитоны размером много больше  $r_R$ , которые перемещались со скоростью, близкой к  $\beta$ . В подтверждение теории [77] они оказались антициклонами, т. е. вращение в них происходило против вращения сосуда, а поверхность была выпуклая. Недавно был построен сосуд [81], в котором  $r_R$  и глубина жидкости были значительно больше, чем в сосуде, описанном в [79]. В нем были реализованы солитоны размером порядка  $r_R$ , которые согласно теории [80] в зависимости от начального возмущения были или циклонами, или антициклонами, или парой циклон — антициклон.

Рассмотрим теперь желобковые дрейфовые волны, которые отличаются от рассмотренных тем, что фазовая скорость вдоль  $z$  много больше тепловой скорости электронов. Тогда имеем уравне-

ние неразрывности для электронов  $dn/dt + \partial nv_{ze}/\partial z = 0$ , что совместно с (14.4) дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{enc}{B\Omega} \frac{d\Delta\varphi}{dt} + \frac{ec}{B\Omega} \operatorname{div}(nv_p \cdot \nabla) \nabla\varphi + \nabla_{\parallel} j_{\parallel} + env_p \cdot \nabla U = 0; \\ v_p = 2[\zeta, \nabla p]/nM\Omega; dp/dt = 0; U = \ln[B(y)/B(0)]. \end{aligned} \right\} \quad (14.12)$$

Здесь  $j_{\parallel}$  — плотность электрического тока вдоль магнитного поля; добавлен эффект неоднородности магнитного поля в виде безразмерного потенциала  $U$ , который может привести к желобковой неустойчивости [1, 88]. Как показано в [90], из уравнений Максвелла следует

$$\nabla_{\parallel} j_{\parallel} = (\mathbf{B} \cdot \nabla j_{\parallel})/B = (c/4\pi B)[\nabla A, \nabla \Delta A]; dA/dt = 0. \quad (14.13)$$

Здесь  $A$  — компонента векторного потенциала вдоль магнитного поля;  $\mathbf{B}_{\perp} = [\zeta, \nabla A]$ . Таким образом, система (14.12) — (14.13) снова получилась двумерной (все величины зависят только от  $x, y$ ).

В [91] показано, что при  $U = \kappa_B y$  система (14.12) имеет решение в виде вихрей Ларичева — Резника. В стационарном случае  $\varphi = \varphi(x - ut, y)$ , если считать  $\varphi$  локализованной функцией, из (14.12), (14.13) имеем

$$A = B_x(y + \psi/u); p = p_0 [1 + \kappa_p(y + \psi/u)]; \psi = c\varphi/B. \quad (14.14)$$

Такой выбор  $A$  означает, что магнитное поле вдали от области локализации  $\varphi$  имеет постоянный наклон в плоскости  $x, z$ . Подставляя (14.13), (14.14) в (14.12), в стационарном случае получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta\psi + \gamma y = F(\psi + uy); \psi = \psi(x - ut, y); \\ \gamma = \frac{2\kappa_B \kappa_p p_0}{n_0 M u} \left( 1 - \frac{\kappa_p p_0}{n_0 M u \Omega} + \frac{B_x^2}{4\pi n_0 M u^2} \right) = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (14.15)$$

где  $F$  — произвольная функция; (14.15) эквивалентно уравнению (14.5), если там  $q_N = 0$ . Выбирая  $F$  в виде кусочно-линейной функции, приводим (14.15) к (14.9), (14.10), решение которых, как упоминалось, выражается через функции Бесселя и Макдональда.

Таким образом, уравнение (14.12) имеет решение в виде двумерного вихря, наклоненного под малым углом  $B_x/B$  к основному магнитному полю. Интересно, что потенциал  $U$ , приводящий к желобковой неустойчивости, необходим для локализации этих же волн. Возможно, развитие желобковой неустойчивости приводит к образованию хаотического набора таких вихрей [91].

Посмотрим теперь, как возникает уравнение (14.1) в теории электронной жидкости. Уравнение движения одной из компонент в пренебрежении диссипацией и давлением имеет вид

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (e_a/m_a) (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]/c). \quad (14.16)$$

Взяв от него ротор и подставив  $c \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{H}_t$ , сразу получим, что в каждую компоненту вморожен ротор обобщенного импульса:

$$\operatorname{rot} \mathbf{p}_t = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{p}]; \mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}/c. \quad (14.17)$$

В крупномасштабных движениях в заморожено магнитное поле; в этом случае в обобщенном импульсе доминирует член  $e_a \mathbf{A}/c$ ; в мелкомасштабном ( $\lambda < c/\omega_{pa}$ ) (14.17) превращается в уравнение движения идеальной жидкости. Рассмотрим движения с масштабом  $c/\omega_{pe} < \lambda < c/\omega_{pi}$ . В этом случае ионы можно считать неподвижными, скорости — нерелятивистскими,  $4\pi \mathbf{J} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}$ . Тогда (14.17) в безразмерных переменных приобретает вид (дополнительно считаем  $n = \text{const}$ )

$$(\partial/\partial t) (\mathbf{H} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \times (\mathbf{H} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H})]. \quad (14.18)$$

Для конфигурации  $z$ -пинча, когда имеется лишь одна компонента магнитного поля,  $H_\varphi(r, z)$ , в цилиндрических координатах и в предположении квазиклассичности (14.18) принимает вид уравнения (14.1)

$$H_t - (\partial/\partial z) (H + \Delta H + H^2/2) = [\xi \times \nabla H] \nabla \Delta H, \quad (14.19)$$

имеющего солитонные решения.

Таким образом, инерция электронов останавливает образование разрывов. Солитоны такого типа могут образовываться не только в  $z$ -пинчах, но и в других конфигурациях, не имеющих шира. Похожие солитоны также могут образовываться на ветвях потенциальных дрейфовых колебаний с учетом конечного ларморовского радиуса частиц [9].

### 15. Трехмерные локализованные вихри в обычной и магнитной гидродинамике

Имеются разнообразные стационарные вихри, однако в случае идеальной жидкости ни для одного из них не удастся доказать устойчивость. В магнитной гидродинамике существуют устойчивые вихри.

Начнем с рассмотрения уравнений «близнецов»:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_t = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}]; \quad (15.1)$$

$$\mathbf{v}_t = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}], \quad (15.2)$$

где (15.1) — хорошо известное уравнение движения несжимаемой невязкой жидкости; (15.2) — уравнение электронной магнитной гидродинамики, а  $\mathbf{v}$  имеет смысл магнитного поля. Оба уравнения сохраняют энергию, одинаково выраженную через  $\mathbf{v}$ :

$$H = \int (\mathbf{v}^2/2) d^3r, \quad (15.3)$$

однако канонические переменные вводятся по-разному [76]. Если можно ввести канонические переменные Клебша

$$\lambda_t = \delta H / \delta \mu; \quad \mu_t = -\delta H / \delta \lambda, \quad (15.4)$$

то для уравнения (15.1)  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = [\nabla \lambda \times \nabla \mu]$ , а для (15.2)  $\mathbf{v} = [\nabla \lambda \times \nabla \mu]$ .

Нетрудно видеть, что стационарные решения уравнений (15.1) и (15.2) совпадают, однако условия их устойчивости, вообще гово-



ря, различны. Это различие вызвано тем, что в (15.1)  $\text{rot } v$  вморожен в  $v$ , а в (15.2)  $v$  вморожен в  $\text{rot } v$ .

Посмотрим, как возникают уравнения стационарных векторных полей из вариационного принципа. Будем минимизировать энергию магнитного поля при единственном ограничении —  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Это означает, что вариация имеет вид  $\delta \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A}$  — произвольный малый вектор, а

$$\delta \int (\mathbf{B}^2/2) d^3r = \int \mathbf{B} \text{rot } \mathbf{A} d^3r = \int \text{rot } \mathbf{B} \mathbf{A} d^3r = 0, \quad (15.5)$$

откуда следует, что  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ , т. е. токи отсутствуют.

Наложим более сильное ограничение — потребуем вмороженной эквивалентности полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B} + \delta \mathbf{B}$ , т. е.  $\delta \mathbf{B} = \text{rot} [\delta \mathbf{r} \times \mathbf{B}]$ , где  $\delta \mathbf{r}$  — произвольный малый вектор, тогда

$$\delta \int (\mathbf{B}^2/2) d^3r = \int \text{rot } \mathbf{B} [\delta \mathbf{r} \times \mathbf{B}] d^3r = \int \delta \mathbf{r} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}] d^3r = 0, \quad (15.6)$$

откуда  $\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} = 0$ ;  $\mathbf{B} = c(r) \text{rot } \mathbf{B}$ ; поле — бессиповое.

Наконец, наложим еще более сильное ограничение — вморозим  $\mathbf{B}$  в несжимаемую жидкость:

$$\delta \mathbf{B} = \text{rot} [\text{rot } \delta \mathbf{A} \times \mathbf{B}];$$

$$\begin{aligned} \delta \int (\mathbf{B}^2/2) d^3r &= \int \text{rot } \mathbf{B} [\text{rot } \delta \mathbf{A} \times \mathbf{B}] d^3r = \\ &= \int \text{rot } \delta \mathbf{A} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}] d^3r = \int \delta \mathbf{A} \text{rot} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}] d^3r = 0, \end{aligned} \quad (15.7)$$

откуда

$$[\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}] = \nabla p. \quad (15.8)$$

Топологическая классификация векторных полей, удовлетворяющих уравнению (15.8), принадлежит В. И. Арнольду [68, 82]. Им было показано, что поверхности уровня  $p$  — тороиды (за исключением вырожденных случаев), на которых линии  $\mathbf{B}$  и  $\text{rot } \mathbf{B}$  образуют винтовые обмотки. Если  $\nabla p = 0$  в конечной области, то интегральные линии могут плотно заполнять трехмерные области (это, по крайней мере, не запрещено). Рассмотрим эту возможность подробнее. Пусть  $[\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}] = 0$  в конечной области, тогда  $c\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{B}$ , где  $c(r)$  — гладкая функция. Такие поля называют бессиповыми. Согласно В. И. Арнольду [82] и в этом случае линии поля укладываются на двумерные торы, если  $c$  — не константа и  $\mathbf{B}$  не обращается в нуль. Действительно, из  $\text{div } c\mathbf{B} = \text{div } \text{rot } \mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{B} \nabla c = 0$  следует, что  $c$  равно константе вдоль интегральных линий; если они плотно заполняют область, то  $c$  в этой области — константа.

Численный эксперимент Хэнона показал, что в одной части объема бессиповое поле  $B_x = A \sin z + c \cos y$ ;  $B_y = B \sin x + A \cos z$ ;  $B_z = c \sin y + B \cos z$  имеет магнитные поверхности, а в другой линии поля плотно заполняют пространство. Аналитические примеры такого рода, видимо, неизвестны.

Перейдем к рассмотрению локализованных конфигураций. Пусть  $\mathbf{B}$  вморожено в несжимаемую жидкость. Это означает, что

сохраняется величина  $|\mathbf{V}|/a$ , где  $a$  — локальная длина силовой линии, и энергия поля может быть устремлена к нулю, лишь если длина всех силовых линий стремится к нулю. Рассмотрим пример аксиально-симметричной конфигурации с одной компонентой магнитного поля  $B_\varphi(r, z)$ . Преобразование вида  $B_\varphi(r/\alpha, z, \alpha^2)/\alpha$  обеспечивает замороженность, энергия же убывает как  $\alpha^{-2}$  и стремится к нулю при  $\alpha \rightarrow 0$ . Если силовые линии зацеплены, то устремить их длину к нулю не удастся, и энергия отграничена от нуля. Однако это еще не означает существования гладкого минимального решения с предписанной нетривиальной топологией [82]. Действительно, векторное поле общего положения плотно заполняет трехмерные области и не может быть уложено на тороидальные поверхности. Бессиловые поля без магнитных поверхностей также не могут появиться в задаче без границ, так как все они имеют бесконечную энергию. Для доказательства этого утверждения заметим, что работа не совершается и энергия поля не изменяется при деформациях, оставляющих конфигурацию бессиловой. Деформация бессилового поля вида  $\alpha^{-2}\mathbf{V}(r/\alpha)$  уменьшает энергию как  $\alpha^{-1}$  (хотя уменьшаться энергия не может), и это означает, что она бесконечна.

Таким образом, при начальном магнитном поле общего вида решения вариационной задачи нет, что, возможно, означает образование разрывов. В качестве исходного можно, например, взять поле, все линии которого представляют окружности, зацепленные друг с другом один раз. Аналитическое выражение поля такого вида приведено в [83].

Таким образом, уравнение (15.2) имеет устойчивые стационарные локализованные решения с магнитными поверхностями, что доказывает существование локализованных вихрей в идеальной жидкости, устойчивость которых не выяснена.

Много решений можно построить численно с помощью метода Греда — Шафранова. В [84] найден новый класс гладких решений уравнений обычной и магнитной гидродинамики в виде тороидальных вихрей, экспоненциально быстро исчезающих на бесконечности. Эти решения автономны, т. е. переходят друг в друга при преобразовании подобия. Возможно, что это структурные элементы развитой турбулентности.

В системе покоя стационарного вихря уравнения идеальной магнитной гидродинамики можно записать в виде

$$[\mathbf{q} \operatorname{rot} \mathbf{q}] - [\mathbf{V} \operatorname{rot} \mathbf{V}] = \nabla (4\pi\rho - q^2/2); \quad (15.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0; \operatorname{rot} [\mathbf{q}\mathbf{V}] = 0; \quad (15.10)$$

$$\mathbf{V}\nabla\rho = \mathbf{q}\nabla\rho = 0; \mathbf{q} = \sqrt{4\pi\rho}\mathbf{v}. \quad (15.11)$$

Здесь предположено, что плотность жидкости  $\rho$  постоянна вдоль силовых линий магнитного поля и скорости  $\mathbf{v}$  жидкости и силовые линии и линии тока лежат на поверхностях постоянной плотности. Рассмотрим следующие конфигурации. Первая, когда  $\mathbf{q} = M\mathbf{V}$ , где

$M$  — константа, имеет смысл числа Маха (отношения скорости жидкости к скорости Альфвена), причем имеется как полоидальная, так и тороидальная компонента полей. Такие вихри в [84] названы параллельными. В других случаях магнитное поле имеет полоидальную компоненту, а скорость — только тороидальную, или наоборот. Они названы в [84] магнитным и динамическим вихрем соответственно.

В случае  $p=p_0-q^2/(8\pi)$ ,  $\mathbf{q}=\mathbf{V}$ , где  $p_0$  — давление на бесконечности, имеется вырождение: поле может иметь любую конфигурацию. Здесь особый интерес представляет случай, когда на бесконечности магнитное поле — постоянный вектор и плотность также постоянна. Тогда любая конфигурация движется со скоростью, равной альфвеновской скорости на бесконечности (в том числе и конфигурации с замкнутыми поверхностями;  $\mathbf{q}$  — сгустки плазмы).

Рассмотрим параллельный вихрь  $\mathbf{q}=\mathbf{M}\mathbf{V}$  с  $M\neq 1$ , имеющий осевую симметрию. В цилиндрической системе координат, вводя потенциал Стокса по формулам

$$rB_r = \partial\psi/\partial z; rB_v = f(\psi); rB_z = -\partial\psi/\partial r \quad (15.12)$$

и считая, что тороидальная компонента магнитного поля  $B_v$  является произвольной функцией  $\psi$ , деленной на  $r$ , приводим уравнение (15.9) к уравнению Греда—Шафранова [85]:

$$\Delta^*\psi = -r^2F' - ff'; \Delta^* = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (15.13)$$

Штрих обозначает производную по аргументу. Здесь предположено также, что давление есть функция вида

$$4\pi p = (1-M^2)F(\psi) - q^2/2, M = \text{const}. \quad (15.14)$$

Отсюда видно, что при отличии скорости от нуля ( $M\neq 0$ ) давление не является поверхностной функцией. Переходу к гидродинамике без магнитного поля соответствует предел  $M\rightarrow\infty$  с соответствующим переопределением  $\psi$ ,  $F$ ,  $f$ .

В магнитном вихре магнитное поле задается формулами (15.12), и, чтобы удовлетворить условию (15.10), нужно положить  $q_v = rg(\psi)$ ,  $q_r = q_z = 0$ , где  $g$  — произвольная функция. Подставляя эти выражения в (15.9), получаем

$$\Delta^*\psi = -r^2F' - ff' - r^4gg'. \quad (15.15)$$

Здесь давление дается той же формулой (15.14), где нужно положить  $M=0$ .

Уравнение динамического вихря получается аналогично, перестановкой выражений скорости и магнитного поля, и также имеет вид (15.15).

Уравнения (15.13), (15.15) становятся солитонными при определенном выборе входящих в них произвольных функций, а именно нужно, чтобы они были степенными функциями  $\psi$ . Положим в (15.3)  $F = -a\psi^2$ ;  $f = b\psi^2$ , где  $a$  и  $b$  — произвольные постоянные. Тогда после преобразований подобия (15.13) приводится к виду

$$\Delta^*\psi = r^2\psi - \psi^3. \quad (15.16)$$

Уравнение магнитного вихря принимает типичный для солитонов вид, если, например, положить

$$F = a\psi^4; \quad f = 0; \quad g = \sqrt{b_1 - b_2\psi^2}. \quad (15.17)$$

Тогда после преобразования подобия из (15.15) получим

$$\Delta^*\psi = r^4\psi - r^2\psi^3. \quad (15.18)$$

Уравнения (15.16), (15.18) имеют локализованные решения. Заметим, что при некоторых других выборах произвольных функций, например, таких, которые дают уравнения

$$\Delta^*\psi = \psi - r^2\psi^3; \quad (15.19)$$

$$\Delta^*\psi = r^2\psi - r^4\psi^3, \quad (15.20)$$

солитонных решений нет. В самом деле, умножим эти уравнения на  $r^{-3}\partial\psi/\partial r$  и проинтегрируем по всему объему. Тогда после интегрирования по частям, если решение локализовано, справа получим отрицательную величину, а слева — неотрицательную, откуда следует, что эти уравнения не имеют уединенных решений.

Уравнения (15.16), (15.18) решаются методом стабилизирующего множителя, причем функция Грина тоже вычисляется с помощью ЭВМ [84]. На рис. 15.1, 15.2 приведены рельефы этих решений, а на рис. 15.3, 15.4 — распределения тороидальной компоненты завихренности  $\Omega = \Delta^*\psi/r$  в этих решениях, которая после обезразмеривания равна  $\text{rot}_\varphi \mathbf{v}$  или  $\text{rot}_\varphi \mathbf{B}$ .

Из рисунков видно, что величина  $\Omega$  в отличие от  $\psi$  меняет знак. Центральная область вокруг максимума  $\psi$  окружена более слабой завихренностью противоположного знака, распределенной таким образом, что происходит полная экранировка, аналогичная экранировке внешнего заряда в плазме. В ранее известных решениях такая экранировка отсутствовала.

Представляет интерес сравнить размещение области завихренности вокруг максимума  $\psi$  в солитоне при квадратичной нелинейности, приведенной на рисунках в [84], и при кубической нелинейности на рис. 15.3, 15.4. В первом случае центральная область прижимается к оси симметрии солитона, а во втором экранирующий вихрь окружает центральную часть и с внешней, и с осевой стороны.

Распределение давления в параллельном вихре таково, что  $p$  минимально в центре вихря, где  $\psi$  максимальна. Такой вихрь удерживается внешним давлением плазмы  $p_0$ . Когда нет магнитного поля, в отличие от вихря Хилла такой вихрь не перемещается относительно жидкости, что вызвано наличием тороидальной компоненты скорости и экранировкой. Во внешнем постоянном магнитном поле при числе Маха  $M=1$  имеет место вырождение, т. е. возможны стационарные решения довольно произвольной формы. В работе [86] доказывается, что такие решения безразлично устойчивы. Однако в этом случае солитонные решения важны из-за их уединенности. При доказательстве устойчивости приведенных солитонных решений в общем случае возникают те же трудности, что

и при доказательстве устойчивости плазмы в тороидальных ловушках, и пока оно остается открытой проблемой.

Внимание к локализованным структурам в последнее время увеличивается (см., например, [75]). Наглядный пример таких структур — солитоны на пленке стекающей вязкой жидкости [87]. Рассмотренные в этом параграфе вихри также могут играть роль структур.

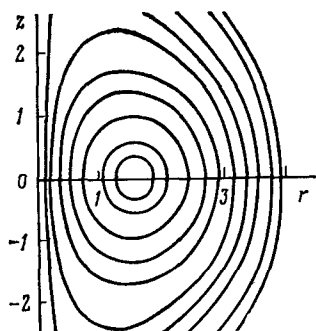


Рис. 15.1. Рельеф потенциала Стокса  $\psi$  солитонного решения уравнения (15.19) (максимальное значение достигается при  $r=1,6$  и равно 3,8)

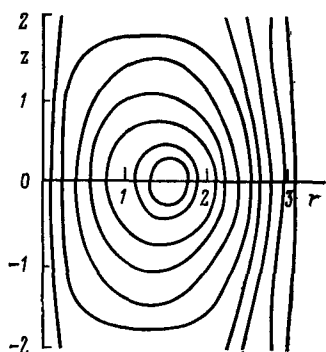


Рис. 15.2. Рельеф солитонного решения уравнения (15.20) (максимальное значение достигается при  $r=1,5$  и равно 3,3)

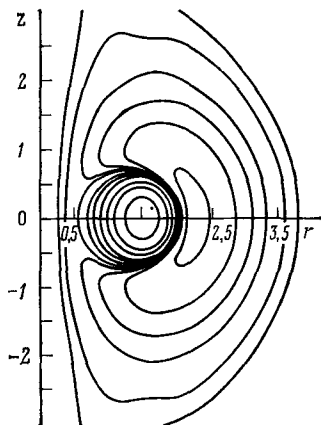


Рис. 15.3. Рельеф тороидальной компоненты завихренности в решении уравнения (15.19) (минимальное значение достигается при  $r=1,5$  и равно  $-29$ , максимальное — при  $r=2,3$  и равно 1,9)

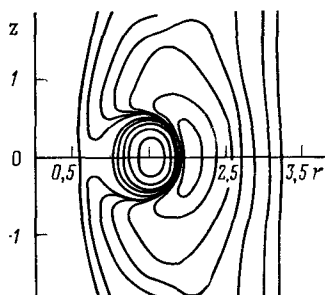


Рис. 15.4. То же, что и на рис. 15.3, для уравнения (15.20) (минимальное значение достигается при  $r=1,5$  и равно  $-43$ , максимальное — при  $r=2,0$  и равно 6,1)

## 16. Устойчивые вихри в уравнении Власова

В одномерном случае понижение плотности в фазовом пространстве способно реализовать максимум энергии при фиксированных интегралах движения.

Уравнение Власова — одно из фундаментальных уравнений физики плазмы, однако для него содержательной теории турбулентности без участия волн не построено, так как отсутствуют долгоживущие структурные элементы. В качестве структурного элемента обычно предлагают макрочастицу в фазовом пространстве, называемую также баллистической модой, гранулой, клампом, дыркой, волной ван Кампена или Бернштейна—Грина—Крускала и т. д. Если такая макрочастица устойчива, ее шансы на важную роль в турбулентности существенно повышаются.

Уравнение Власова очень похоже на уравнение двумерной жидкости—в обоих случаях вдоль траекторий потока с нулевой дивергенцией сохраняется в одном случае  $f$ , а в другом  $\text{rot } v$ . Другими словами, уравнение Власова имеет вид  $df/dt=0$ ; в развернутой форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (16.1)$$

откуда следует сохранение бесконечного числа интегралов:

$$I_n = \int f^n dx dv. \quad (16.2)$$

Покажем, что при условии сохранения  $f$  вдоль траекторий понижения плотности способны реализовать максимум энергии, как и вихри в двумерной жидкости. Представим функцию распределения в виде  $f = f_0 + \tilde{f}$ , где  $f_0$ —константа. Тогда сохраняется величина  $\epsilon$ , равная энергии с точностью до аддитивной постоянной:

$$\epsilon = \int \tilde{f} (mv^2/2) dx dv - 2\pi e^2 \int \tilde{f}(x_1, v_1) \tilde{f}(x_2, v_2) |x_1 - x_2| dx_1 dv_1 dx_2 dv_2. \quad (16.3)$$

Второй член в (16.3) отрицателен при любых возмущениях, а первый—при возмущениях, у которых  $\tilde{f} < 0$ . С учетом сохранения площади возмущения  $\Delta x \Delta v \simeq \text{const}$  видно, что при  $\tilde{f} < 0$  (16.3) имеет нетривиальный (ненулевой) максимум  $\epsilon_0 < 0$ . Ему соответствует устойчивое решение в виде локализованной волны БГК, причем  $\tilde{f}$  монотонно убывает от периферии к центру. Если учесть также сохранение импульса, то такие решения могут двигаться. Характерные размеры определяются оценкой

$$m \Delta v^2 / 2 \simeq e^2 \Delta x^2 \Delta v. \quad (16.4)$$

Находить точные решения не имеет особого смысла, так как их бесконечно много.

Электрическое поле сосредоточено в основном вне дырки. С учетом спада  $f$  при больших скоростях поле экранируется на дебаевском радиусе. При  $\tilde{f} \simeq f_0$  и при  $\Delta v \Delta x \ll v_T r_D$  обнаруживается,

что  $\Delta x \ll r_D$ . Это допускает аналогично двумерным вихрям (см. § 12) пары «вальсирующих» дырок с расстоянием между центрами много меньше  $r_D$ .

В трехмерном случае также удастся построить локализованные образования, реализующие максимум энергии. К сожалению, гипотеза о локальности невыполнена, так как в трехмерном случае  $\Delta x \gtrsim r_D$ , поэтому вопрос о существовании устойчивых вихрей остается открытым. При взаимодействии понижений плотности они должны проявлять тенденцию к слиянию. Энергия и импульс понижения плотности отрицательны, но производная  $d\epsilon/dr$  имеет обычный знак и равна скорости. Если дырка образована на ионной функции распределения, то при отражении от нее резонансных электронов ее энергия уменьшается и она ускоряется. При достижении дыркой скорости порядка тепловой ионной ее существование прекращается.

### Заключение

Подводя итоги, можно сказать, что выделение солитонных степеней свободы целесообразно и важная роль солитонных решений очевидна. Солитоны оказались структурными элементами, из которых (наряду со свободными волнами) строится картина сильной турбулентности. Степень завершенности частей этой картины различна.

Задача нахождения солитонных решений и анализа их устойчивости в основном решена при любом числе измерений. Трудности с выяснением устойчивости возникают лишь в случае векторного поля, например, для трехмерных вихрей в идеальной жидкости.

Элементарные процессы с участием солитонов типа поглощения свободных волн и взаимодействия с частицами также в основном понятны, хотя конкретных задач решено пока мало.

Количественной теории турбулентности с участием солитонов еще не создано, но ход процесса в целом ясен. Происходит перекачка по спектру с увеличением интенсивности солитонов как за счет слияния солитонов при столкновениях, так и за счет поглощения солитонами свободных волн. Выделяющаяся при этом энергия поглощается при рассеянии на частицах или уносится свободными волнами.

Все более широким становится понятие солитона. Его часто применяют даже к полностью диссипативным структурам. В случае гамильтоновых систем в солитоне могут быть захваченные частицы, т. е. солитон может переносить вещество или даже быть полностью замороженным в веществе. Солитоны могут быть и в дискретных средах, в том числе и в радиотехнических линиях передачи сигналов. Общая черта всех этих уединенных структур — устойчивая компенсация эффектов расплывания из-за дисперсии, диффузии или неоднородного растяжения нелинейными эффектами корреляции фаз или нелинейной активностью среды.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964, вып. 4, с. 188—339.
2. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М.: Наука, 1967.—287 с.
3. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1975.—238 с.
4. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. — М.: Атомиздат, 1979. — 320 с.
5. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. Нелинейные волны. — УФН, 1971, т. 103, с. 193—232.
6. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964, вып. 4, с. 20—80.
7. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. — 340 с.
8. Скотт Э., Чу Ф., Мак-Лафлин Д. Солитон — новое понятие в прикладных науках. — ТИИЭР, 1973, т. 61, с. 79—120.
9. Данилов Ю. А., Петвиашвили В. И. Солитоны в плазме. — В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1983, с. 5—54.
10. Теория солитонов/ В. Е. Захаров, С. В. Манакон, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. М.: Наука, 1980. — 320 с.
11. Солитоны в действии: Пер. с англ./ Под ред. А. В. Гапонова-Грехова и Л. А. Островского. М.: Мир, 1981. — 312 с.
12. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. О трехмерных солитонах. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 66, с. 594—600.
13. Кузнецов Е. А., Турицын С. К. О двумерных и трехмерных солитонах в слабодиспергирующих средах. — Там же, 1982, т. 82, с. 1457—1463.
14. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах. — Докл. АН СССР, 1970, т. 192, с. 753—755.
15. Петвиашвили В. И. Об уравнении необыкновенного солитона. — Физика плазмы, 1976, т. 2, с. 469—472.
16. Two-dimensional solitons of the Kadomtsev-Petviashvili equation and their interaction/ L. A. Bordag, A. R. Its, A. V. Matveev et al. — Phys. Lett., 1979, vol. 63A, p. 205—206.
17. Яньков В. В. Фазовый переход в системе сильнонелинейных волн. — В кн.: Всес. конф. по взаимодействию электромагнитных волн с плазмой: Тезисы докладов. Душанбе, 1979, с. 53.
18. Крылов С. Ф., Яньков В. В. О роли солитонов в сильной турбулентности. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1980, т. 79, с. 82—86.
19. Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн — Там же, 1972, т. 62, с. 1745—1758.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — М.: Наука, 1976. — 584 с.
21. Крылов С. Ф., Яньков В. В. Модель сильной турбулентности. — Препринт 3542/6, ИАЭ им. И. В. Курчатова, М., 1962, 17 с.
22. Карпман В. И., Маслов Е. М. Структура хвостов, образующихся при возмущении возмущения на солитоны. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1978, т. 75, с. 504—512.
23. Мак-Лифлин Д., Скотт Э. Многосолитонная теория возмущений. — В кн.: [11], с. 210—268.
24. Modified nonlinear schrodinger equation for Alfvén waves propagating along the magnetic field in cold plasmas/ K. Mio, T. Ogino, K. Minami, S. Takeda. — J. Phys. Soc. Japan, 1976, vol 41, p. 265—273.
25. Mjølhus E. On the modified instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field. — J. Plasma Phys., 1976, vol. 16, p. 321—327.
26. Kaup D. J., Newell A. C. An exact solution for a derivative nonlinear schrodinger equation. — J. Math. Phys., 1978, vol. 19, p. 798—801.
27. Петвиашвили В. И. Неодномерные солитоны. — В кн.: Нелинейные волны./ Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. — М.: Наука, 1979, с. 5—21.
28. Lakner K. Computation of ideal MHD equilibria. — Computational Phys. Communications, 1976, vol. 12, p. 33—44.



29. **Белавин А. А., Поляков А. М.** Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика. — Письма ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 503—506.
30. **Заставенко Л. Г.** Частицеподобные решения нелинейного волнового уравнения. — Прикл. матем. и механ., 1965, т. 29, с. 430—439.
31. **Вахитов Н. Г., Колоколов А. А.** Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщающейся нелинейностью. — Изв. вузов, сер. Радиофизика, 1973, т. 16, с. 1020—1028.
32. **Захаров В. Е., Кузнецов Е. А., Рубенчик А. М.** Устойчивость солитонов. — Препринт Ин-та автоматки и электротетрии СО АН СССР, 1982, № 18, 48 с.
33. **Веденов А. А., Рудаков Л. И.** О взаимодействии волн в сплошных средах. — Докл. АН СССР, 1964, т. 159, с. 767—770.
34. **Lighthill M. J.** On the stability on nonlinear waves. — J. Instn. math. Appl., 1965, vol. 1, p. 269—278.
35. **Павленко В. П., Петвиашвили В. И.** Зонная теория устойчивости нелинейных периодических волн в плазме. — Физика плазмы, 1982, т. 8, с. 206—210.
36. **Рудаков Л. И.** Торможение электронных пучков в плазме с высоким уровнем ленгмюровской турбулентности. — Докл. АН СССР, 1972, т. 207, с. 821—824.
37. **Нелинейная теория модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн/ А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, Ю. С. Сигов и др.** — Физика плазмы, 1975, т. 1, с. 10—17.
38. **Чукбар К. В., Яньков В. В.** Взаимодействие высокочастотных и звуковых волн с солитонами. — Физика плазмы, 1981, т. 7, с. 653—656.
39. **Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.** Квазилинейная теория колебаний плазмы. — Ядерный синтез, приложение 2, 1962, с. 465.
40. **Яньков В. В.** Баллистические моды и торможение электронного пучка на ленгмюровских солитонах. — Физика плазмы, 1977, т. 3, с. 710—711.
41. **Карпман В. И.** Эффекты взаимодействия ионно-звуковых солитонов с резонансными частицами плазмы. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1979, т. 77, с. 1382—1395.
42. **Горев В. В., Кингсеп А. С., Рудаков Л. И.** Сильная ленгмюровская турбулентность. — Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1976, т. 19, с. 691—712.
43. **Веряев А. А., Цытович В. Н.** О нелинейном затухании Ландау для сильно-нелинейных волн в плазме. — Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1977, т. 20, с. 1639—1652.
44. **Яньков В. В.** Два типа ленгмюровских солитонов. — Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 179—180.
45. **Яньков В. В.** Последствия ленгмюровского коллапса в лазерной короне. — Физика плазмы, 1982, т. 8, с. 86—91.
46. **Ахиезер И. А., Даниеля И. А., Цинцадзе Н. Л.** К теории трансформации и рассеяния электромагнитных волн в неравновесной плазме. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1964, т. 46, с. 1331—1341.
47. **Aamodt R., Drummond W.** On the radiation of turbulent plasmas. J. Nucl. Energy, 1964, vol. 6, p. 147.
48. **Галеев А. А., Красносельских В. В.** Сильная ленгмюровская турбулентность в магнитосфере Земли как источник километрового излучения. — Письма ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 558—559.
49. **Breizman V. N., Pekker L. S.** Electromagnetic radiation from a localised Langmuir perturbation. — Phys. Lett., 1978, vol. 65A, p. 121—122.
50. **Ishichenko M. B., Yan'kov V. V.** Dipole and quadrypole radiation at harmonics of electron waves in plasmas. — Phys. Lett., 1982, vol. 90A, p. 248—249.
- 51 а) **Петвиашвили В. И.** Высоочастотный диамагнетизм и трехмерные электронно-циклотронные солитоны в плазме. — Письма ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 682—684.
- б) **Некрасов А. К., Петвиашвили В. И.** Самофокусировка и трехмерные солитоны циклотронных волн, бегущих вдоль магнитного поля. — Физика плазмы, 1981, т. 7, с. 1145—1151.
52. **Чукбар К. В., Яньков В. В.** Ленгмюровские солитоны в неоднородной плазме. — Физика плазмы, 1977, т. 3, с. 1398—1401.
53. **Thornhill S., Ter Haar D.** Langmuir turbulense and modulational instability. — Phys. Rep., 1978, vol. 43, p. 45—61.

54. Курин В. В., Фрайман Г. М. Взаимодействие ленгмюровских солитонов со звуком. — Физика плазмы, 1981, т. 7, с. 716—726.
55. Коу П. К., Цинцадзе Н. Л., Цхакая Д. Д. Излучение ионно-звуковых волн ускоренно движущимся ленгмюровским солитоном. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1982, т. 82, с. 1449—1457.
56. Karpman V. I. On the dynamics of sonic-longmuir solitons. — Phys. Scripta, 1975, vol. 11, p. 261—265.
57. Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В. Взаимодействие и связанные состояния солитонов как классических частиц. — ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 586—591.
58. Янкаускас З. К. Радиальные распределения поля в самофокусировавшемся пучке света. — Изд. вузов. Сер. Радиофизика, 1966, т. 9, с. 412—415.
59. Миронов В. А., Сергеев А. М., Шер Э. М. О не одномерных связанных солитонах в нелинейных уравнениях поля. — Докл. АН СССР, 1981, т. 260, с. 325—327.
60. Горшков К. А., Миронов В. А., Сергеев А. М. Препринт № 49, ИПФ АН СССР, 1982.
61. Уизем Дж. Линеинные и нелинейные волны: Пер. с англ./ Под ред. А. Б. Шабата. — М.: Мир, 1977. — 622 с.
62. Method for solving the Kortweg de Vries equation/ C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura. — Phys. Rev. Lett., 1967, vol. 19, p. 1095—1097.
63. Zakharov V. E., Schulman E. I. Degenerative dispersion laws, motion invariants and kinetic equations. — Physica, 1980, vol. 1D, p. 192—202.
64. Шульман Е. И. Об интегрируемости уравнений резонансного взаимодействия длинной и короткой волн. — Докл. АН СССР, 1981, т. 259, с. 579—581.
65. Юэн Г., Лэйк Б. Теория нелинейных волн в приложении к волнам на глубокой воде. — В кн.: [11], с. 103—137.
66. Захаров В. Е. О нелинейных гравитационных волнах на поверхности жидкости. — Прикл. матем. и теорет. физ., 1968, с. 86—90.
67. Юдович В. И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной жидкости сквозь заданную область. — Матем. сборник, 1964, т. 64, с. 562—588.
68. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. — 432 с.
69. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. — 720 с.
70. Дим Г., Забуски Н. Стационарные V-состояния, их взаимодействие, возврат и разрушение. — В кн.: [11], с. 289—304.
71. Deem A., Zabusky N. Ergodic boundary in numerical simulations of two-dimensional turbulence. — Phys. Rev. Lett., 1971, vol. 27, p. 7—8.
72. Глэз Х. а) Два подхода к моделированию двумерной турбулентности. — В сб.: Математика. Новое в зарубежной науке, вып. 22; б) Странные аттракторы/ Пер. с англ., М.: Мир, 1981, с. 75—87.
73. Linden-Bell D. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1967, vol. 136, p. 101 (обсуждается в книге [3], с. 227—230).
74. Montgomery D. Two-dimensional vortex motion and «negative temperatures». — Phys. Lett., 1972, vol. 39A, p. 1—3.
75. Кузьмин Г. А. Статистическая механика завихренности в двумерной когерентной структуре. — В кн.: Структурная турбулентность. Сб. тр. Ин-та теплофизики СО АН СССР, Новосибирск, 1982, с. 103—115.
76. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Гамильтоновский формализм для систем гидродинамического типа. Препринт ИАЭ СО АН СССР, № 186, Новосибирск, 1982.
77. Петвиашвили В. И. Красное пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме. — Письма ЖЭТФ, 1980, т. 32, с. 632—635.
78. Петвиашвили В. И., Яньков В. В. Двухслойные вихри во вращающейся стратифицированной жидкости. — Докл. АН СССР, 1982, т. 267, с. 825—828.
79. Солитон Россби в лаборатории/ С. В. Антипов, М. В. Незлин, Е. Н. Снежкин, А. С. Трубников. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1982, т. 82, с. 145—153.
80. Ларичев В. Д., Резник Г. М. О двумерных удлинённых волнах Россби. — Докл. АН СССР, 1976, т. 231, с. 1077—1079.

81. **О дрейфовых солитонах в мелкой быстровращающейся жидкости**/ Р. А. Антонова, Б. С. Жвания, Дж. Г. Ломинадзе и др. — Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 37, с. 545—548.
82. **Арнольд В. И.** Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения. — В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям (Дилижан, 1973). Ереван, изд. АН АрмССР, 1974, с. 229—256.
83. **Камчатнов А. М.** Топологический солитон в магнитной гидродинамике. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1982, т. 82, с. 117—124.
84. **Петвиашвили В. И., Похотелов О. А., Чудин И. В.** Уединенные тороидальные вихри. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1982, т. 82, с. 1833—1839.
85. **Шафранов В. Д.** Равновесие плазмы в магнитном поле. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Т. 2. М.: Атомиздат, 1963, с. 92—132.
86. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, 1961.
87. **Петвиашвили В. И., Цвелодуб О. Ю.** Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости. — Докл. АН СССР, 1978, т. 238, с. 1321—1323.
88. **Михайловский А. Б.** Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. М.: Атомиздат, 1977, с. 127.
89. **Петвиашвили В. И.** Циклоны и антициклоны в зональном потоке. Доклад на II Международной рабочей группе по нелинейным и турбулентным процессам в физике. Киев, 1983.
90. **Кадомцев Б. Б., Погуце О. П.** Нелинейные винтовые возмущения плазмы в токамаке. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 65, с. 575—586.
91. **Павленко В. А., Петвиашвили В. И.** Уединенный вихрь при желобковой неустойчивости. — Физика плазмы, 1983, т. 9, с. 1034—1037.

# ЦИКЛОТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ

*А. В. Тимофеев*

---

## Предисловие

В физике плазмы циклотронными принято называть колебания, частота которых близка к циклотронной частоте одной из компонент плазмы (электронов или ионов). Благодаря явлению циклотронного резонансного взаимодействия циклотронные колебания могут интенсивно обмениваться энергией с заряженными частицами. Этим определяется важная роль, которую играют циклотронные колебания. Так, циклотронные колебания используют для диагностики плазмы — активной (просвечивание плазмы циклотронными колебаниями) и пассивной (по регистрации спонтанного циклотронного излучения).

С помощью циклотронных колебаний, вводимых извне, осуществляют нагрев плазмы. Причем интересно, что в одном из типов мощных генераторов электромагнитных колебаний (мазеры на циклотронном резонансе) явление циклотронного резонанса используется для передачи энергии в обратном направлении от пучка заряженных частиц к электромагнитным колебаниям.

Спонтанное излучение циклотронных колебаний высокотемпературной термоядерной плазмой может привести к ее сильному охлаждению. Если плазма термодинамически неравновесна, то циклотронные колебания могут возбуждаться когерентно — раскачивается так называемая циклотронная неустойчивость. В некоторых магнитных ловушках, как, например, адиабатических, раскачка циклотронных колебаний сопровождается интенсивным выбросом плазмы.

Ввиду интереса, проявляемого к циклотронным колебаниям, они затрагиваются в той или иной степени в большинстве руководств по физике плазмы и практически во всех, посвященных колебаниям плазмы [1—14]. Имеются обзоры, в которых рассматриваются отдельные аспекты циклотронных колебаний [15—23]. Целиком посвящена циклотронным колебаниям монография [24]. В ней анализируются собственно циклотронные колебания (см. § 1.4 настоящей работы) как в равновесной, так и в неравновесной плазме.

В настоящей работе систематически анализируются основные аспекты теории циклотронных колебаний равновесной плазмы, обсуждается также идейная сторона практических приложений циклотронных колебаний (нагрев плазмы и ее диагностика). Не-

посредственно к экспериментальным данным мы обращаемся лишь в тех случаях, когда они допускают четкое сопоставление с предсказаниями теории.

Первый раздел посвящен циклотронным колебаниям в однородном магнитном поле. Он начинается с анализа резонансного взаимодействия отдельных заряженных частиц с циклотронными колебаниями. Элементарные закономерности, определяющие это явление, неоднократно проявляются и в более сложных явлениях, обсуждаемых в дальнейшем. В двух последующих разделах рассматривается влияние неоднородности магнитного поля и ограниченности плазмы на циклотронные колебания. Эти факторы, как правило, необходимо учитывать при использовании теории циклотронных колебаний для анализа реальных ситуаций. Так, даже сравнительно небольшая неоднородность магнитного поля может привести к ограничению области резонансного циклотронного взаимодействия малой окрестностью резонансной точки, где циклотронная частота заряженных частиц совпадает с частотой электромагнитных колебаний.

Теория циклотронных колебаний равновесной плазмы развита в такой степени, что можно составить законченную (в общих чертах) картину явления. Что касается теории циклотронных колебаний неравновесной плазмы, то она еще далека от своего завершения. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, отклонения от состояния равновесия могут быть весьма многообразны. Каждой из таких возможностей соответствует своя разновидность циклотронной неустойчивости, возникающей, когда отклонение от равновесия становится достаточно заметным. Обзор большого числа циклотронных неустойчивостей можно найти в [9, 13, 17]. Тем не менее пока еще нельзя сказать, что список циклотронных неустойчивостей исчерпан. Во-вторых, теория циклотронных колебаний неравновесной плазмы, для того чтобы быть логически завершенной и давать ответы на вопросы, которые ставит эксперимент, должна быть нелинейной. Трудности, которые стоят на этом пути, общеизвестны. В то же время при рассмотрении циклотронных колебаний равновесной плазмы и анализе соответствующих экспериментальных данных, как правило, можно не обращаться к нелинейной теории. В настоящей работе элементы нелинейной теории вошли лишь в разд. 3.

Хотя пути, по которым развиваются теория циклотронных колебаний равновесной плазмы и теория циклотронных колебаний неравновесной плазмы, несколько различны, эти разделы теории отнюдь не разделены непроницаемой перегородкой. Напротив, их взаимодействие ведет к более глубокому пониманию проблемы и дает стимулы к дальнейшему развитию теории. Так, выяснению основных закономерностей, определяющих процесс резонансного циклотронного взаимодействия, способствовал его анализ в экстремальных условиях предельно неравновесной плазмы, когда одна из ее компонент (ионы) образовывала бесконечно тонкое кольцо (ларморовскую окружность), вращающееся в магнитном поле с циклотронной частотой. В качестве другого примера укажем про-

блему возникновения стохастического движения заряженных частиц в циклотронных колебаниях. В случае равновесной плазмы она возникла в связи с вопросом об истинном (необратимом) нагреве плазмы циклотронными колебаниями, а в случае неравновесной — в связи с вопросом о потере частиц из адиабатических ловушек под действием циклотронных колебаний (так называемая проблема нарушения суперадиабатичности).

Взаимодействие между двумя разделами теории циклотронных колебаний, без сомнения, будет продолжаться и в дальнейшем. В частности, автор надеется, что методы исследования циклотронных колебаний равновесной плазмы, излагаемые в настоящей работе, найдут применение при анализе циклотронных колебаний неравновесной плазмы.

## 1. Циклотронные колебания в однородном магнитном поле

### 1.1. Механизм резонансного циклотронного взаимодействия

**1.1.1. Особенности резонансного взаимодействия в магнитном поле.** Если плазма помещена в магнитное поле, то тепловое движение заряженных частиц в направлении поперек поля приобретает характер ларморовского (циклотронного) вращения, причем все частицы с одинаковым отношением заряда к массе вращаются с одной и той же частотой  $\omega_j = |e_j|B / (m_j c)$ . (Последнее справедливо в пренебрежении релятивистской зависимости массы от скорости.) Появление у плазмы в магнитном поле «собственной» ча-

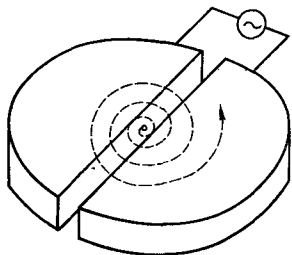


Рис. 1.1. Схема циклотрона (— — — траектория ускоряемой частицы)

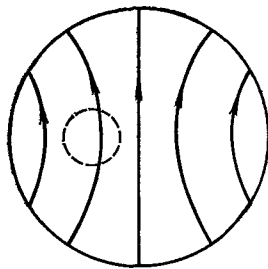


Рис. 1.2. Электрическое поле колебаний  $TE_{11}$  в цилиндрическом волноводе (— — — ларморовская окружность заряженной частицы; невозмущенное магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка — параллельно осн волновода)

стоты создает условия для интенсивного (резонансного) обмена энергией между заряженными частицами и электромагнитными колебаниями. Следует, однако, отметить, что эта возможность была впервые использована не в плазменных системах, а в ускорителях заряженных частиц — циклотронах (рис. 1.1). По названию этих устройств термин «циклотронный» стал использоваться для обозначения всего комплекса явлений, обусловленных вращением за-

ряженных частиц в магнитном поле. Отметим два условия, обеспечивающих успешную работу циклотрона: 1) электрическое поле, действующее на ускоряемую частицу, имеет постоянную фазу; 2) оно параллельно вектору скорости частицы. Эти условия выполняются потому, что геометрия циклотрона соответствует геометрии движения частицы (вращение по циклотронной окружности), а дуанты защищают частицу от действия электрического поля в моменты, когда оно могло бы ее замедлить.

При циклотронном резонансе в плазме ни одно из этих условий, вообще говоря, не выполняется. Действительно, пространственная зависимость электрического поля колебаний, как правило, определяется граничными условиями или условиями возбуждения и поэтому не согласована с геометрией движения заряженных частиц. В результате выполнения условия циклотронного резонанса  $\omega = \omega_c$  (или  $\omega = n\omega_c$ , где  $n$  — целое, см. ниже) приводит лишь к тому, что фаза электрического поля колебаний в фиксированной точке циклотронной окружности остается одной и той же при последовательных проходах частицы через эту точку. Однако от точки к точке значение фазы может меняться. Точно так же может меняться и направление электрического поля по отношению к направлению вектора скорости частицы. (Одна из возможных задач о резонансном взаимодействии электромагнитных колебаний с ограниченной плазмой проиллюстрирована на рис. 1.2). Поэтому выполнение условия циклотронного резонанса в общем случае не обеспечивает постоянства электрического поля на траектории произвольно выбранной заряженной частицы и, следовательно, не говорит о том, что все частицы будут систематически ускоряться или замедляться.

Обычно условию постоянства удовлетворяет не «все» электрическое поле, а лишь его некоторая «часть». Ее выделение — обязательный элемент анализа циклотронного резонансного взаимодействия. В часто используемом формализме кинетического уравнения эта операция присутствует в скрытом виде. Между тем именно она обуславливает основные закономерности, определяющие процесс резонансного циклотронного взаимодействия. Их выяснению и посвящен настоящий параграф.

В реальных условиях длина волны электромагнитных колебаний часто мала по сравнению с размером системы. При теоретическом анализе таких колебаний обычно используют приближение плоских волн, т. е. пространственно-временную зависимость электромагнитного поля выбирают в виде  $\sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Ввиду сравнительной теоретической простоты, а также широты возможных приложений теория резонансного циклотронного взаимодействия плазмы с плоскими волнами разработана наиболее подробно. Учитывая эти обстоятельства, начнем анализ со случая плоских волн.

Если магнитное поле отсутствует, то заряженные частицы, как и плоская волна, движутся прямолинейно. Поэтому условие фазового резонанса имеет простой вид:  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ . Оно означает, что проек-

ция скорости частицы на направление распространения колебаний совпадает с фазовой скоростью последних.

В магнитном поле заряженные частицы движутся по винтовым траекториям:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t) = \{ & x_0 + \rho_e (\sin \varphi(t) - \sin \varphi_0); \\ & y_0 - \rho_e (\cos \varphi(t) - \cos \varphi_0); z_0 + v_{\parallel} t \}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь используется декартова система координат, ось  $OZ$  которой направлена вдоль магнитного поля. Для определенности рассмотрим электронную компоненту плазмы;  $\rho_e = v_{\perp} / \omega_e$  — ларморовский радиус электрона,  $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_e t$  — фаза ларморовского вращения; значками  $\perp$  и  $\parallel$  отмечено направление по отношению к магнитному полю.

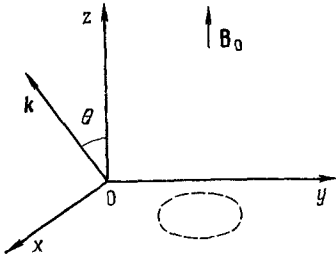


Рис. 1.3. Система координат, как правило, используемая в настоящей работе (— — — ларморовская окружность одного из электронов)

Чтобы согласовать геометрию электрического поля колебаний с геометрией электронной траектории, исходную плоскую волну разлагаем по винтовым, вращающимся коаксиально с данной частицей. Разложение осуществляется с помощью известного соотношения

$$\exp(i\xi \sin \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\xi) \exp(im\varphi) \quad (1.2)$$

и имеет вид

$$\exp(-i\omega t + ik_{\perp} x + ik_{\parallel} z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\xi) \exp(-i\omega t + im\varphi + ik_{\parallel} z). \quad (1.3)$$

В левой части (1.3) используется декартова система координат, введенная выше, в правой — цилиндрическая, центр которой совпадает с центром ларморовской окружности данного электрона (рис. 1.3);  $J_m$  — функция Бесселя индекса  $m$ ;  $\xi = k_{\perp} \rho$  ( $\rho$  — радиус в цилиндрической системе координат). Предполагается, что колебания распространяются в плоскости  $XOZ$ , т. е.  $\mathbf{k} = (k_{\perp}; 0; k_{\parallel})$ .

В (1.3) суммирование идет по азимутальному волновому числу, множитель  $J_m(\xi)$  дает амплитуду соответствующей парциальной волны. Поскольку на траектории электрона  $\dot{\varphi} = \omega_e$ ,  $\dot{z} = v_{\parallel}$ , то для



парциальной волны с номером  $m$  суммарный доплеровский сдвиг, обусловленный ларморовским вращением и движением вдоль магнитного поля, равен  $m\omega_e + k_{\parallel}v_{\parallel}$ . Соответственно резонансное условие имеет вид

$$\omega = m\omega_e + k_{\parallel}v_{\parallel}. \quad (1.4)$$

Электрон движется по окружности радиусом  $\rho = \rho_e$ , и поэтому амплитуда резонансной составляющей равна  $J_m(\xi_e)$  где  $\xi_e = k_{\perp}\rho_e$ . Отметим, что при некоторых значениях ларморовского радиуса электрона функция Бесселя  $J_m(\xi_e)$  обращается в нуль. Такие электроны не взаимодействуют с колебаниями (резонансной), несмотря на выполнение условия (1.4).

Магнитное поле не только модифицирует условие фазового резонанса. Иным становится и влияние поляризации колебаний на резонансное взаимодействие. Действительно, в магнитном поле поперечная компонента вектора скорости частицы  $\mathbf{v}_{\perp}$  вращается с циклотронной частотой. Так же должно вращаться и поле волны  $\mathbf{E}_{\perp}$ , чтобы обмен энергией между электромагнитными колебаниями и заряженными частицами был достаточно эффективным. (В дальнейшем увидим, что электрическое поле, вращающееся в противоположную сторону, также может резонансно взаимодействовать с заряженными частицами, хотя в этом случае эффективность взаимодействия, как правило, меньше). Эти соображения показывают, что при анализе резонансного взаимодействия в магнитном поле наряду с выделением резонансной винтовой гармоники необходимо исходное электрическое поле разделить на две составляющие, одна из которых вращается в ту же сторону, что и электроны в магнитном поле, другая — в ту же, что и ионы. При выбранной временной зависимости электрического поля колебаний  $\sim \exp(-i\omega t)$  им соответствуют сочетания  $E_{-} = E_x - iE_y$  и  $E_{+} = E_x + iE_y$ .

**1.1.2. Циклотронное резонансное взаимодействие с плоскими волнами.** Взаимодействие отдельных частиц. Проанализируем, следуя [25], циклотронное взаимодействие заряженных частиц (электронов) с плоскими волнами более подробно. В наиболее общем случае выражение для электрического поля плоской волны имеет вид

$$E_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = E_{\alpha} \sin \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}, t),$$

где

$$\Psi_{\alpha} = \Psi_{\alpha}^{(0)} - \omega t + \mathbf{k}\mathbf{r}; \quad \mathbf{k} = (k_{\perp}; 0; k_{\parallel}); \quad \alpha = x, y, z.$$

Если с помощью одного из уравнений Максвелла,  $\text{rot } \mathbf{E} + (1/c) \times \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ , выразить магнитное поле волны через электрическое, то уравнение движения электронов  $m_e \dot{\mathbf{v}} = -e \{ \mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{v}\mathbf{B}] \}$  примет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{v}} + \omega_e [\mathbf{v}\mathbf{b}] = - (e/m_e) (\mathbf{E} (1 - \mathbf{k}\mathbf{v}/\omega) + (\mathbf{k}/\omega) (\mathbf{v}\mathbf{E})). \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{b}$  — единичный вектор, направленный по оси  $Z$ , т. е. вдоль основного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ .

Помножим (1.5) поочередно на  $[\mathbf{b}[\mathbf{v}\mathbf{b}]]$  и  $\mathbf{b}(\mathbf{v}\mathbf{b})$ :

$$\dot{\epsilon}_{\perp} = -e \left\{ \mathbf{E}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp} + \frac{1}{\omega} [(\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp})(E_{\parallel} v_{\parallel}) - (k_{\parallel} v_{\parallel})(\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp})] \right\}; \quad (1.6)$$

$$\dot{\epsilon}_{\parallel} = -e \left\{ E_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{1}{\omega} [(\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp})(E_{\parallel} v_{\parallel}) - (k_{\parallel} v_{\parallel})(\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp})] \right\}, \quad (1.7)$$

где  $\epsilon_{\perp}$  ( $\epsilon_{\parallel}$ ) — энергия движения электрона в направлении поперек (вдоль) основного магнитного поля.

Первые слагаемые в правых частях (1.6), (1.7) учитывают работу электрического поля над электроном. Слагаемые, включающие сочетания  $\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp}$  и  $k_{\parallel} v_{\parallel}$ , обязаны действию магнитного поля волны. Магнитное поле поворачивает вектор скорости электрона и поэтому переводит поперечную энергию в продольную и обратно. При таком повороте полная энергия, как это и следует из (1.6), (1.7), остается неизменной.

Предположим, что резонансное условие (1.4) выполняется при  $m=n$ , т. е. имеет место резонанс на  $n$ -й гармонике циклотронной частоты. В этом случае, как было отмечено в предыдущем параграфе, электрическое поле волны может приводить к систематическому изменению энергии электрона. Это означает, что если электрическое поле представить в виде  $\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t)$ , где  $\mathbf{r}(t)$  — траектория электрона, то в правых частях уравнений (1.6), (1.7) появятся слагаемые, не зависящие от времени. Выделим эти слагаемые. Ограничиваясь, как и всюду в настоящем разделе, линейным приближением, будем считать амплитуду колебаний достаточно малой. Траектория электрона, не возмущенная волной, дается (1.1). Подставляя (1.1) в выражения для фаз, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha}(t) = & \Psi_{\alpha}^{(0)} + \mathbf{k}\mathbf{r}_0 - (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})t + \\ & + \xi_e (\sin(\omega_e t + \varphi_0) - \sin \varphi_0). \end{aligned}$$

Теперь в соответствии с соображениями, высказанными в предыдущем параграфе, следует разложить исходную плоскую волну на винтовые, вращающиеся коаксиально с данным электроном. Используя (1.2), а также соотношения

$$\begin{aligned} J_{n-1}(\xi) + J_{n+1}(\xi) &= (2n/\xi) J_n(\xi); \\ J_{n-1}(\xi) - J_{n+1}(\xi) &= 2J_n'(\xi), \end{aligned}$$

представим результат усреднения выражений (1.6), (1.7) по времени в виде

$$\langle \dot{\epsilon}_{\perp} \rangle_t = -e \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \mathcal{E}_n; \quad (1.8)$$

$$\langle \dot{\epsilon}_{\parallel} \rangle_t = -e \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \mathcal{E}_n. \quad (1.9)$$

Здесь скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по времени, а

$$\mathcal{G}_n = E_x \sin \Psi_{x,n}^{(0)} v_{\perp} \frac{n}{\xi_e} J_n(\xi_e) - E_y \cos \Psi_{y,n}^{(0)} v_{\perp} J'_n(\xi_e) + \\ + E_z \sin \Psi_{z,n}^{(0)} v_{\parallel} J_n(\xi_e),$$

где  $\Psi_{\alpha,n}^{(0)} = \Psi_{\alpha}^{(0)} + \mathbf{k}\mathbf{r}_0 - \xi_e \sin \varphi_0 + n\varphi_0$ , или в другом виде:

$$\mathcal{G}_n = v_{\perp} E_{-,n} + v_{\perp} E_{+,n} + v_{\parallel} E_{\parallel,n}. \quad (1.10)$$

Здесь

$$E_{\mp,n} = (1/2)(E_x \sin \Psi_{x,n}^{(0)} \mp E_y \cos \Psi_{y,n}^{(0)}) J_{n\mp 1}(\xi_e);$$

$$E_{\parallel,n} = E_z \sin \Psi_{z,n}^{(0)} J_n(\xi_e).$$

Весь последующий анализ по существу состоит в интерпретации выражения (1.10). Постараемся понять, какие физические процессы оно описывает. В п. 1.1.1 отмечено, что амплитуда парциальной винтовой волны, коаксиальной с данным электроном, пропорциональна  $J_m(\xi_e)$ , где  $m$  — азимутальное волновое число. Таким образом, первое слагаемое в (1.10) должно описывать взаимодействие электрона с винтовой волной с  $m=n-1$ ; оно пропорционально  $v_{\perp}$ , а также компонентам электрического поля, перпендикулярным  $\mathbf{V}_0$ . Поперечная компонента вектора скорости электрона  $\mathbf{v}_{\perp}$  вращается против часовой стрелки с частотой  $\omega_e$ . С той же частотой и в том же направлении должно вращаться  $\mathbf{E}_{\perp}$ , чтобы его взаимодействие с электроном было резонансным. В системе координат, связанной с электроном, частота  $m$ -й парциальной составляющей из разложения плоской волны по винтовым  $\omega'_m = \omega - m\omega_e - k_{\parallel} v_{\parallel}$ . Если частота колебаний удовлетворяет резонансному условию (1.4), а номер азимутальной гармоники  $m=n-1$ , то электрон будет «видеть» поле требуемой частоты  $\omega'_m = \omega_e$ .

Теперь установим связь между величиной  $E_{-,n}$  и характеристиками составляющей электрического поля, вращающейся в сторону вращения электронов в магнитном поле (в электронную сторону). Как известно, поле плоской поляризации, меняющееся во времени по гармоническому закону, можно представить в виде суммы полей с круговой поляризацией, вращающихся в противоположные стороны. Пределаем эту операцию с полями

$$E_{x,n-1}(t, \mathbf{r}(t)) = \mathbf{x}^{(0)} E_x J_{n-1}(\xi_e) \sin(\Psi_{x,n-1}^{(0)} - \omega_e t)$$

и

$$E_{y,n-1}(t, \mathbf{r}(t)) = \mathbf{y}^{(0)} E_y J_{n-1}(\xi_e) \sin(\Psi_{y,n-1}^{(0)} - \omega_e t).$$

Здесь  $\mathbf{r}(t)$  — траектория электрона, второй индекс у величин  $E_{x,n-1}$  и  $E_{y,n-1}$  означает, как и выше, выделение  $(n-1)$ -й азимутальной гармоники на ларморовской окружности электрона. Амплитуды составляющих с круговой поляризацией будут, очевидно, равны  $(1/2)E_x J_{n-1}(\xi_e)$  и  $(1/2)E_y J_{n-1}(\xi_e)$ , причем выделенная

из  $E_{x,n-1}$  составляющая, вращающаяся в электронную сторону, будет отставать по фазе на  $\pi/2 - \Psi_{y,n-1}^{(0)} + \Psi_{x,n-1}^{(0)}$  от соответствующей составляющей, выделенной из  $E_{y,n-1}$ . Поэтому суммарное электрическое поле, вращающееся в электронную сторону  $E_{-,n-1}(t)$ , будет характеризоваться амплитудой

$$E_{-,n-1} = (1/2) J_{n-1}(\xi_e) (E_x^2 + E_y^2 + 2E_x E_y \sin(\Psi_{x,n-1}^{(0)} - \Psi_{y,n-1}^{(0)}))^{1/2}$$

и фазой

$$\Psi_{-,n-1}(t) = \text{arctg} \left\{ \frac{E_x \sin \Psi_{x,n-1}^{(0)} - E_y \cos \Psi_{y,n-1}^{(0)}}{E_x \cos \Psi_{x,n-1}^{(0)} + E_y \sin \Psi_{y,n-1}^{(0)}} \right\} - \omega_e t.$$

Угол между  $E_{-,n-1}(t)$  и вектором поперечной скорости электрона  $\mathbf{v}_\perp(t)$  не меняется со временем и равен:  $\Phi = \Psi_{-,n-1}(t) + \omega_e t + \varphi_0 - (\pi/2) = \text{const}$ . Учитывая это, находим, что скалярное произведение  $E_{-,n-1}(t) \mathbf{v}_\perp(t)$  равно первому слагаемому (1.10).

Связь между  $E_{-,n-1}$  и составляющей, вращающейся в электронную сторону, можно также установить, перейдя к комплексным величинам:  $E_\alpha^c(\mathbf{r}, t) = E_\alpha \exp(i(\Psi_\alpha^{(0)} - \omega t + \mathbf{k}\mathbf{r}))$ . При таком представлении опережение по фазе составляющей, выделенной из  $y$ -компоненты электрического поля, учитывается умножением на  $\exp(-i\pi/2)$ . Поэтому комплексная амплитуда суммарного поля, вращающегося в электронную сторону, оказывается равной  $E_-^c = E_x \exp(-i\Psi_x^{(0)}) - iE_y \exp(-i\Psi_y^{(0)})$ . Мнимая часть этого выражения, взятая с обратным знаком, действительно пропорциональна  $E_{-,n-1}$ .

Покажем теперь, что с электроном может взаимодействовать и составляющая электрического поля, вращающаяся в ионную сторону. Рассмотрим парциальную волну с азимутальным волновым числом  $m = n + 1$ . Ее угловая скорость  $\omega/(n+1) = \omega_e n/(n+1)$  меньше  $\omega_e$ . Электрон обгоняет эту волну, и поэтому фаза волны  $\Psi_{+,m}(t) = \omega t - m\varphi(t) + \text{const}$  на траектории электрона не убывает, а возрастает со временем — для электрона направление хода времени как бы меняет знак. В результате электрон будет «видеть» волну, электрическое поле которой вращается в обратном направлении, т. е. в электронную сторону. Амплитуда этой волны, очевидно, пропорциональна  $J_{n+1}(\xi_e)$ , и, как показывает рассмотрение, аналогичное проведенному выше, величина  $E_{+,n+1}(t) \mathbf{v}_\perp(t)$  равна второму слагаемому в (1.10).

Наконец, рассмотрим колебания, электрическое поле которых параллельно  $\mathbf{v}_0$ . Продольная компонента скорости электрона  $v_\parallel$  постоянна во времени, поэтому постоянным должно быть и электрическое поле. Нетрудно видеть, что если выполнено резонансное условие (1.4), то с электроном взаимодействует парциальная составляющая из разложения (1.3) с азимутальным волновым числом  $m = n$  и амплитудой  $E_z J_n(\xi_e)$  [см. третье слагаемое в (1.10)].

В силу сравнительной малости ларморовского радиуса электронов часто выполняется условие  $\xi_e = k_{\perp} \rho_e \ll 1$ . Используя приближенное равенство  $J_n(\xi) \cong (1/n!) (\xi/2)^n$ , справедливое при  $\xi \ll 1$ , находим, что в этом случае с электронами наиболее интенсивно взаимодействуют колебания, обладающие электронной поляризацией. В предельном случае  $\xi = 0$  (холодные электроны) только такие колебания и могут взаимодействовать с электронами, причем для этого их частота должна быть равна циклотронной ( $n=1$ ). Взаимодействие колебаний с иной поляризацией, а также колебаний электронной поляризации на гармониках циклотронной частоты ( $n \geq 2$ ) всецело обусловлено эффектами конечности ларморовского радиуса электронов, причем колебания с электронной поляризацией взаимодействуют сильнее, чем колебания с  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$ , а последние сильнее колебаний с ионной поляризацией. [Множители при амплитудах соответствующих составляющих в (1.10) пропорциональны  $\xi_e^{n-1}$ ,  $\xi_e^n$ ,  $\xi_e^{n+1}$ .]

Выражения (1.8)–(1.10) позволяют определить не только полное количество энергии, которым электроны обмениваются с колебаниями, но и распределение этой энергии по степеням свободы (поперечной и продольной). С этой целью проанализируем движение электронов на плоскости  $v_{\parallel} 0v_{\perp}$  под действием циклотронных колебаний. Поделив (1.8) на (1.9), получим

$$\langle \dot{\varepsilon}_{\perp} \rangle_t / \langle \dot{\varepsilon}_{\parallel} \rangle_t = (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})' / (k_{\parallel} v_{\parallel}). \quad (1.11)$$

Представим  $\langle \dot{\varepsilon}_{\perp} \rangle_t$  в виде  $\langle \dot{\varepsilon}_{\perp} \rangle_t = m_e v_{\perp} \dot{v}_{\perp}$  и соответственно  $\langle \dot{\varepsilon}_{\parallel} \rangle_t = m_e v_{\parallel} \dot{v}_{\parallel}$ . Здесь под  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$  понимаются усредненные по времени значения. Проинтегрировав (1.11), найдем  $v_{\perp}^2 + (v_{\parallel} - \omega/k_{\parallel})^2 = \text{const}$ , откуда следует, что на плоскости  $v_{\parallel} 0v_{\perp}$  резонансные частицы перемещаются по окружностям, центры которых расположены в одной точке  $(\omega/k_{\parallel}, 0)$  (рис. 1.4). Этот результат хорошо известен в квазилинейной теории [26, 27]. Дадим его физическую интерпретацию. С этой целью перейдем в систему отсчета, движущуюся вдоль магнитного поля со скоростью  $\omega/k_{\parallel}$ . В этой системе центры окружностей на плоскости  $v_{\parallel} 0v_{\perp}$  совпадают с началом координат и, следовательно, полная энергия электрона постоянна. Действительно, в рассматриваемой системе координат частота волны  $\omega' = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel}$  обращается в нуль, а сама электромагнитная волна вырождается в статическое пространственно-периодическое возмущение с потенциальным электрическим полем. Такое возмущение не может вызывать систематического изменения полной энергии резонансных частиц, поскольку они движутся по линиям постоянной фазы волны, а следовательно, и постоянного потенциала. С точки зрения квантовой теории постоянство энергии резонансных частиц обусловлено обращением в нуль энергии квантов ( $\varepsilon = \hbar \omega$ ) при  $\omega = 0$ . Однако импульс квантов отличен от

нуля, поэтому волна может изменить направление вектора скорости электрона и, следовательно, соотношение между  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$ \*

Отметим, что соотношение между приращениями поперечной и продольной энергии не зависит от поляризации колебаний [см. (1.8), (1.9)]. Это может приводить к довольно парадоксальным следствиям. Например, рассмотрим обыкновенные колебания, распространяющиеся поперек магнитного поля. Электрическое поле таких колебаний направлено вдоль  $B_0$  (см. § 1.2). Поскольку мы считаем, что  $k_{\parallel}=0$  ( $\omega/k_{\parallel}=\infty$ ), то окружности на рис. 1.4 вырождаются в вертикальные прямые. Это означает, что хотя  $E_{\perp}=0$ , у электронов при взаимодействии с колебаниями изменяется лишь

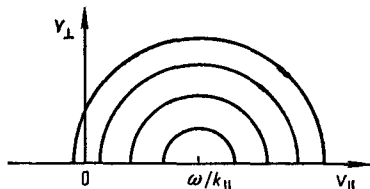


Рис. 1.4. Траектории движения электронов на плоскости  $v_{\parallel} - v_{\perp}$  под действием электромагнитных колебаний

поперечная энергия. Парадокс разрешается, если учесть действие магнитного поля волны. Магнитное поле поворачивает вектор скорости электрона и полностью переводит изменение продольной энергии в поперечную [см. (1.6), (1.7)].

Взаимодействие ансамбля частиц. Покажем теперь, что использование формализма кинетического уравнения приводит к тем же результатам, что и проведенный выше анализ движения отдельных частиц. С этой целью рассмотрим движение ансамбля электронов, у которых «начальные» фазы  $\Psi_{\alpha}^{(0)}$  меняются со временем хаотически. Предположим, что характерное время изменения фазы  $\tau_c$  намного больше периода колебаний. К сбою фазы могут приводить, например, кулоновские соударения, и в случае колебаний, излучаемых внешним генератором, нестабильность фазы последнего. Отметим, что только при наличии случайных воздействий понятие резонанса становится физически определенным, а именно: резонансными должны считаться колебания, частота которых отличается от определяемой из условия (1.4) не более чем на  $\delta\omega \approx \tau_c^{-1}$ ; соответственно скорости резонансных частиц должны лежать в интервале шириной  $\delta v_{\parallel} \approx (k_{\parallel} \tau_c)^{-1}$ . Эти утверждения, строго говоря, относятся к колебаниям бесконечно малой амплитуды, которые только и рассматриваются в настоящем подразделе. Если амплитуда колебаний достаточно велика, то нелинейные эффекты могут занять место случайных воздействий (см., например, [26, 28], а также ниже раздел 3).

Поскольку выражения для  $\langle \dot{\epsilon}_{\perp} \rangle_t$  и  $\langle \dot{\epsilon}_{\parallel} \rangle_t$  являются гармоническими функциями фаз  $\Psi_{\alpha}^{(0)}$  [см. (1.8), (1.9)], то при усреднении по случайному ансамблю они обращаются в нуль. Это означает, что изменения  $\epsilon_{\perp}$ ,  $\epsilon_{\parallel}$  носят

\* Предлагаемая интерпретация соотношения (1.11), разумеется, справедлива лишь для медленных волн с  $N_{\parallel} \gg 1$ , когда при переходе в движущуюся систему координат величины  $\omega$ ,  $k_{\parallel}$  и другие можно преобразовывать по нерелятивистским формулам.

диффузионный характер. По аналогии с обычными диффузионными процессами напомним

$$\langle\langle \dot{\varepsilon} \rangle_t \rangle_r = -D_{\perp, \perp} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} - D_{\perp, \parallel} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}}; \quad (1.12)$$

$$\langle\langle \dot{\varepsilon}_{\parallel} \rangle_t \rangle_r = -D_{\parallel, \perp} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} - D_{\parallel, \parallel} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}}. \quad (1.13)$$

Здесь скобки со значком  $r$  означают усреднение по случайному ансамблю;  $f_0(\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel})$  — функция распределения электронов;

$$D_{\perp, \perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \langle (\langle \varepsilon_{\perp}(t) \rangle_t - \varepsilon_{\perp}(0))^2 \rangle_r = \langle (\langle \dot{\varepsilon}_{\perp} \rangle_t)^2 \rangle_r \frac{\tau_c}{2};$$

$$D_{\perp, \parallel} = D_{\parallel, \perp} = \langle (\langle \dot{\varepsilon}_{\perp} \rangle_t \langle \dot{\varepsilon}_{\parallel} \rangle_t) \rangle_r \frac{\tau_c}{2}; \quad D_{\parallel, \parallel} = \langle (\langle \dot{\varepsilon}_{\parallel} \rangle_t)^2 \rangle_r \frac{\tau_c}{2};$$

величины  $\langle \dot{\varepsilon}_{\perp} \rangle_t$  и  $\langle \dot{\varepsilon}_{\parallel} \rangle_t$  определяются (1.8), (1.9).

Суммируя (1.12), (1.13), получаем

$$\langle\langle \dot{\varepsilon} \rangle_t \rangle_r = -\frac{\tau_c}{4} e^2 \mathcal{E}_n^2 \left( \frac{n\omega_e}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}} \right). \quad (1.14)$$

Рассмотрим теперь вопрос об изменении функции распределения электронов под действием колебаний с помощью кинетического уравнения. Кинетическое уравнение, линеаризованное по малым возмущениям, вызываемым волной, имеет вид

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{e}{m_e} \left( E + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_1] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.15)$$

Здесь  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — возмущение функции распределения; полная производная в левой части берется по невозмущенной траектории электрона;  $E$ ,  $\mathbf{B}_1$  — напряженность электрического и индукция магнитного поля волны соответственно. При анализе кинетического уравнения возмущенные величины удобно брать в комплексном виде (см. выше):

$$E_{\alpha} \sim \exp(-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \Psi_{\alpha}^{(0)})).$$

Используя стандартный метод интегрирования по траекториям, из (1.15) получаем

$$\begin{aligned} f_1 = i e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i n \varphi_0 - i \xi_e \sin \varphi_0) \frac{1}{\omega - n\omega_e - k_{\parallel} v_{\parallel}} & \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) \times \right. \right. \\ & \times \left( \frac{n}{\xi_e} J_n v_{\perp} E_x \exp(i \Psi_x^{(0)}) - i J_n' v_{\perp} E_y \exp(i \Psi_y^{(0)}) \right) + \\ & \left. \left. + \frac{n\omega_e}{\omega} J_n v_{\parallel} E_z \exp(i \Psi_z^{(0)}) \right] \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \left( \frac{n}{\xi_e} J_n v_{\perp} E_x \exp(i \Psi_x^{(0)}) - i J_n' v_{\perp} E_y \exp(i \Psi_y^{(0)}) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( 1 - \frac{n\omega_e}{\omega} \right) J_n v_{\parallel} E_z \exp(i \Psi_z^{(0)}) \right] \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}} \right\}. \end{aligned}$$

Изменение энергии электронов под действием колебаний дается выражением

$$\int d\mathbf{v} \frac{m v^2}{2} \frac{\partial f}{\partial t} = -e \operatorname{Re} \int d\mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{E}^*) f^{(1)}.$$

Определяя, как обычно,  $\operatorname{Im}(\omega - n\omega_e - k_{\parallel} v_{\parallel})^{-1} = -\pi \delta(\omega - n\omega_e - k_{\parallel} v_{\parallel})$  и производя ряд простых преобразований, получаем

$$\int d\mathbf{v} \frac{m v^2}{2} \frac{\partial f}{\partial t} = -e^2 \pi \int d\mathbf{v} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_e - k_{\parallel} v_{\parallel}) \left[ \mathcal{E}_n^c \right]^2 \left( \frac{n\omega_e}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}} \right). \quad (1.16)$$

Здесь  $\mathcal{E}_n^c$  — естественная модификация выражения (1.10) на случай электрического поля колебаний, взятого в комплексном виде. А именно, в (1.10) должна быть произведена замена  $\sin \Psi_{\alpha, n}^{(0)} \rightarrow \exp(-i\Psi_{\alpha, n}^{(0)})$ . В выражении для  $\mathcal{E}_n^c$  удобно опустить несущественный фазовый множитель  $\exp(-i(\Psi_{\alpha, n}^{(0)} - \Psi_{\alpha}^{(0)}))$ ;

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^c = & E_x \exp(i\Psi_x^{(0)}) v_{\perp} \frac{nJ_n}{\xi_e} - i E_y \exp(i\Psi_y^{(0)}) v_{\perp} J'_n + \\ & + E_z \exp(i\Psi_z^{(0)}) v_{\parallel} J_n = E_{-} v_{\perp} J_{n-1} + E_{+} v_{\perp} J_{n+1} + E_z \exp(i\Psi_z^{(0)}) v_{\parallel} J_n. \end{aligned}$$

Здесь  $E_{\pm} = E_x \exp(i\Psi_x^{(0)}) \pm i E_y \exp(i\Psi_y^{(0)})$ .

Выражение (1.14) отличается от  $n$ -го члена суммы в (1.16) заменой  $\tau_c/4 \rightarrow \pi \delta(\omega - n\omega_e = k_{\parallel} v_{\parallel})$ . Попытаемся понять смысл такой замены. В выражении (1.16)  $\delta$ -функция получается при предельном переходе  $\lim_{\nu \rightarrow 0} \operatorname{Im} \{1/(\omega - n\omega_e - k_{\parallel} v_{\parallel} + i\nu)\} = -\pi \delta(\omega - n\omega_e - k_{\parallel} v_{\parallel})$ . Включение в резонансный знаменатель мнимой добавки  $i\nu$  эквивалентно предположению о сбое фаз  $\Psi_{\alpha, n}^{(0)}$  за время  $\tau_c = (2\pi\nu)^{-1}$ . Если интересуются широкими частотными интервалами  $\Delta\omega \gg \nu$  и «размазанными» распределениями с  $\Delta v_{\parallel} \gg \nu/k_{\parallel}$ , то при вычислении интегралов типа (1.16) конкретное значение  $\nu$  оказывается несущественным, и поэтому можно пользоваться предельными выражениями, получающимися при  $\nu \rightarrow 0$ . Однако следует помнить, что резонансное взаимодействие длится конечное время, и соответственно даже при точном выполнении резонансного условия (1.4) мнимая часть резонансного знаменателя равна конечному значению  $\tau_c^{-1}$ . Таким образом, эквивалентность (1.12), (1.16) можно считать установленной. Дополнительный множитель 2 в (1.16) обязан соотношению  $\langle |\exp(-i\omega t)|^2 \rangle_t = 2 \langle \sin^2 \omega t \rangle_t$ .

**1.1.3. Циклотронный резонанс в системах с коаксиальными ларморовскими окружностями.** Как уже отмечалось, центральным пунктом анализа резонансного циклотронного взаимодействия является выделение из исходной волны резонансной составляющей. Для плоских волн процедура выделения подробно проанализирована в предыдущих параграфах. Однако для систем с магнитным полем характерна не плоская, а, скорее, аксиальная симметрия. Соответственно и колебания таких систем имеют вид ци-



цилиндрических или винтовых волн. Если ларморовский радиус заряженных частиц мал по сравнению с радиусом системы, то в первом приближении ее кривизной в пределах ларморовской окружности можно пренебречь и считать систему плоской. Вместе с тем в ряде случаев такой подход был бы заведомо неверным.

Так, в магнитной ловушке «Астрон» коаксиально вращающиеся релятивистские электроны создавали цилиндрической слой с толщиной, малой по сравнению с  $\rho_e$  [27]. Этот слой предполагалось использовать для так называемого обращения магнитного поля. Рассматриваются системы, в которых аналогичные слои образуются высокоэнергичными ионами [30]. Кольца, образованные коаксиально вращающимися релятивистскими электронами, используются для коллективного ускорения ионов [31].

В ряде адиабатических магнитных ловушек ларморовский радиус ионов был сопоставим с радиусом ловушки. В ловушке АС [32] ионы, вращающиеся вокруг оси системы, образовывали полый цилиндр аналогично релятивистским электронам в ловушке «Астрон». В ловушках ОГРА-1, ДСХ [33, 34] все ионы или их значительная часть имели одно и то же значение ларморовского радиуса  $\rho_i$ , причем центры ларморовских окружностей этих ионов отстоят от оси симметрии системы на расстоянии  $\rho_i$ . Сравнительно высокие значения отношения  $\rho_i/\rho_0$  ( $1 \geq \rho_i/\rho_0 \geq 0,1$ ) характерны для многих адиабатических ловушек. Следует, однако, отметить, что наблюдается тенденция к уменьшению отношения  $\rho_i/\rho_0$ . Так, на установках ОГРА оно уменьшилось от 1 для ОГРА-1 до 0,1 для ОГРА-4.

Проанализируем сначала резонансное циклотронное взаимодействие в простейшем случае системы с коаксиальным вращением, в которой центры всех ларморовских окружностей лежат на ее оси. Колебания таких систем исследовались довольно подробно в связи с проблемой устойчивости плазмы в адиабатических ловушках и проблемой СВЧ-генерации [30, 35—38]. В геометрическом отношении система с коаксиальным вращением аналогична циклотрону, причем использование собственных колебаний цилиндрического объема позволяет обойтись без дуантов. Действительно, в силу аксиальной симметрии системы пространственно-временная зависимость электрического поля собственных колебаний плазмы имеет вид

$$E(\mathbf{r}, t) = E(\rho) \exp(im\varphi + ik_{\parallel}z - i\omega t).$$

Поскольку на траектории заряженной частицы (электрона)  $\dot{\varphi} = \omega_e$ ,  $\dot{z} = v_{\parallel}$ , условие фазового резонанса совпадает с (1.4), где  $m$  — азимутальное волновое число. Если резонансное условие выполнено, то электрическое поле колебаний будет вызывать систематическое изменение энергии электрона. Несложные подсчеты  $\langle \dot{\varepsilon}_{\perp} \rangle_t$  и  $\langle \dot{\varepsilon}_{\parallel} \rangle_t$ , аналогичные проведенным в п. 1.1.2, приводят к выражениям (1.8), (1.9) с

$$\mathcal{E}_n = \mathbf{vE} = \rho \omega_e E_{\varphi} + v_{\parallel} E_{\parallel}. \quad (1.17)$$

Видим, что при анализе резонансного циклотронного взаимодействия в системах с коаксиальным вращением не нужно из исходной волны выделять резонансную винтовую гармонику, а поперечное электрическое поле разделять на составляющие, вращающиеся в электронную и ионную стороны. В результате описание резонансного циклотронного взаимодействия достигается простейшими средствами. В частности, поскольку ларморовские окружности не пересекаются, поперечное движение заряженных частиц может быть описано гидродинамически. Воспользуемся этим обстоятельством, чтобы посмотреть, как выглядит резонансное циклотронное взаимодействие в терминах гидродинамики. Для того чтобы и продольное движение электронов можно было описывать гидродинамически, предположим, что в невозмущенном состоянии все электроны движутся вдоль магнитного поля с одной скоростью. Обобщение на случай произвольного распределения по  $v_{\parallel}$  не составляет труда.

Линеаризуя гидродинамические уравнения движения по малым возмущениям скорости, вызываемым электрическим полем колебаний, получаем

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}_{\perp} + \omega_e [\mathbf{b} \mathbf{V}_{\perp}] = -\frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{i\omega} [\mathbf{V}_0 \text{rot } \mathbf{E}] \right). \quad (1.18)$$

Здесь  $\mathbf{V}_0$  — начальная скорость;  $\mathbf{V}_{\perp}$  — ее возмущение электрическим полем колебаний;  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega_e \frac{\partial}{\partial \varphi} + V_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} = -i(\omega - m\omega_e - k_{\parallel} V_{\parallel}) = = -i\omega' m$ . Отметим, что гидродинамическое уравнение (1.18) совпадает по виду с уравнением движения отдельного электрона при измененном знаке начального магнитного поля  $\mathbf{V}_0$  (второе слагаемое в левой части). Изменение знака эффективного магнитного поля обусловлено учетом инерционных — переносных слагаемых, связанных с невозмущенным ларморовским вращением (подробнее см. ниже).

Из (1.18) находим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_{\perp} &= \frac{ie}{m_e} \frac{1}{(\omega_e^2 - \omega_m'^2)} \left\{ \omega_m'^2 \mathbf{E}_{\perp} - i\omega'_m \mathbf{V}_{\perp} (\mathbf{V}_0 \mathbf{E}) + \right. \\ &\quad \left. + i\omega'_m \omega_e [\mathbf{E} \mathbf{b}] - \omega_e [\mathbf{b} \nabla] (\mathbf{V}_0 \mathbf{E}) \right\}; \\ \mathbf{V}_{\parallel} &= -\frac{ie}{m\omega\omega'_m} \left\{ \omega'_m \mathbf{E}_{\parallel} - i\nabla_{\parallel} (\mathbf{V}_0 \mathbf{E}) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Используя (1.19) и уравнение неразрывности, определяем возмущение плотности:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{e}{m_e \omega} \frac{1}{\omega_e^2 - \omega_m'^2} \left\{ \omega'_m \nabla_{\perp} (n_0 \mathbf{E}_{\perp}) - i\nabla_{\perp} (n_0 \nabla_{\perp} (\mathbf{V}_0 \mathbf{E})) + \right. \\ &\quad \left. + i\omega_e \nabla_{\perp} (n_0 [\mathbf{E} \mathbf{b}]) + \frac{i m \omega_e}{\omega'_m \rho} \frac{dn_0}{d\rho} (\mathbf{V}_0 \mathbf{E}) \right\} - \\ &= -\frac{e}{m \omega \omega_m'^2} \left\{ \omega'_m \nabla_{\parallel} (n_0 \mathbf{E}_{\parallel}) - i\nabla_{\parallel} (n_0 \nabla_{\parallel} (\mathbf{V}_0 \mathbf{E})) \right\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Выражения (1.19), (1.20) позволяют найти плотности тока и заряда, которые входят в уравнения Максвелла. Анализ уравнений Максвелла должен завершить исследование. Примеры подобных исследований можно найти в указанных выше работах, где для ряда случаев, представляющих практический интерес, определены условия неустойчивости собственных колебаний и их инкременты раскачки. Однако нас будут интересовать не конкретные результаты такого рода, а общие закономерности, отличающие резонансное циклотронное взаимодействие в системах с коаксиальным вращением заряженных частиц.

Проанализируем с этой точки зрения выражения (1.19), (1.20). Они обращаются в бесконечность при  $\omega_m' = 0, \pm\omega_e$ , что свидетельствует о резонансах. В плоском случае точно такой же вид имеют резонансные условия для колебаний с продольной, электронной и ионной поляризациями электрического вектора соответственно. Однако, как показано ниже, совпадение резонансных условий — формально и отнюдь не свидетельствует о тождестве физических процессов, приводящих к резонансу.

Резонанс  $\omega_m' = 0$  уже обсуждался с точки зрения движения отдельных частиц. Покажем, что анализ гидродинамических уравнений приводит к тем же результатам. Из первого уравнения (1.19) при  $\omega_m' = 0$  получаем

$$\dot{\rho} = V_{\rho 1} = - \frac{e}{m_e \omega \omega_e} \frac{m}{\rho} (\mathbf{VE}).$$

Отсюда следует, что при  $m \neq 0$  работа электрического поля колебаний над электроном приводит к систематическому изменению ларморовского радиуса. Вполне естественно, что при  $dn_0/d\rho \neq 0$  стационарное распределение электронов по радиусу не достигается [ $n_1$  обращается в бесконечность, см. (1.20)].

В силу соотношения  $V_{\varnothing} = \rho \omega_e$  изменение энергии ларморовского вращения дается выражением

$$\dot{\epsilon}_{\perp} = m_e V_{\varnothing} \dot{V}_{\varnothing} = - e \frac{\omega - k_{\parallel} V_{\parallel}}{\omega} (\mathbf{VE}).$$

Напомним, что при  $m \neq 0$ ,  $E_{\varnothing} = 0$  изменение  $\epsilon_{\perp}$  обусловлено действием магнитного поля колебаний (см. п. 1.1.2).

Изменение продольной энергии находим, используя проекцию (1.18) на направление магнитного поля:

$$\dot{\epsilon}_{\parallel} = m_e V_{\parallel} \dot{V}_{\parallel} = - e \frac{k_{\parallel} V_{\parallel}}{\omega} (\mathbf{VE}).$$

Полученные выражения для  $\dot{\epsilon}_{\perp}$  и  $\dot{\epsilon}_{\parallel}$  вполне согласуются с (1.18), (1.19), а также с (1.17).

Проанализируем теперь резонансы второго типа ( $|\omega_m'| = \omega_e$ ). Обращение в бесконечность  $\mathbf{V}_{\perp 1}$  свидетельствует о том, что при  $|\omega_m'| = \omega_e$  колебания деформируют траекторию электронов, в то время как при  $\omega_m' = 0$  меняется лишь радиус ларморовской окружности.

Для выяснения физической природы резонансов второго типа обратимся к уравнению (1.18). Из него следует, что в отсутствие переменного электрического поля малые возмущения скорости ларморовского вращения также вращаются с частотой  $\omega_e$  в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, однако направление вращения противоположно ларморовскому. Изменение направления вращения обусловлено инерционными силами, вызванными начальным, невозмущенным движением. Действительно, учет «переносного» ускорения в уравнении движения эквивалентен переходу в систему координат, движущуюся с невозмущенной скоростью. Если невозмущенное движение является вращением с частотой  $\Omega_{\text{rot}} = \omega_e$ , то по теореме Лармора силы инерции оказывают

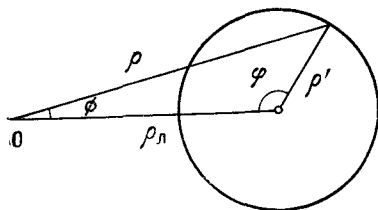


Рис. 1.5. Две цилиндрические системы координат, используемые в п. 1.1.4 (— — ларморовская окружность)

такое же действие на частицу, как и магнитное поле  $\mathbf{B}_L = -2\Omega_{\text{rot}}(m_e c/e)(\mathbf{B}_0/B_0) = -2\mathbf{B}_0$ . Сумма «ларморовского» и реального магнитного полей равна  $\mathbf{B}_{ef} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_0 = -\mathbf{B}_0$ , что и объясняет вид левой части уравнения (1.18). Если правая часть этого уравнения меняется с частотой  $\omega = \omega_e$ , то малые возмущения скорости нарастают во времени. Сложение двух вращений с равными, но противоположно направленными угловыми скоростями приводит к движению по траектории, имеющей вид овала.

Напомним, что резонансы первого типа не искажают формы траектории (окружности). В этом случае при  $E_\varphi \neq 0$  движение во вращающейся системе координат выглядит как дрейф в постоянных скрещенных полях  $E_\varphi \Phi^0$  и  $\mathbf{V}_{ef} = -\mathbf{B}_0$ . Если  $E_\parallel \neq 0$  и  $m \neq 0$ , то в колебаниях имеется  $B_p \neq 0$ , т. е. силовые линии колеблются в плоскостях, проходящих через ось системы. В результате движение вдоль магнитного поля с невозмущенной скоростью  $V_\parallel$  может также приводить к смещению по радиусу.

**1.1.4. Циклотронный резонанс в аксиально-симметричных системах с непрерывным распределением ларморовских центров.** Выше были рассмотрены два противоположных предельных случая: плоских систем (систему можно считать плоской при  $\rho_j/\rho_0 \rightarrow 0$ ) и систем, в которых укладывается лишь один ларморовский радиус (системы с коаксиальным ларморовским вращением). Между тем в реальных установках отношение  $\rho_j/\rho_0$  конечно, а пространственное распределение ларморовских центров непрерывно. Основу для анализа циклотронных колебаний в этом случае составляет так называемая формула сложения Графа [39]. Она играет для цилиндрической геометрии ту же роль, что и формула (1.2) для плоской. С помощью формулы Графа простейшее ре-

шение аксиально-симметричного волнового уравнения  $J_m(\kappa\rho) \times \times \exp(im\varnothing)$  (аналог плоской волны) может быть разложено по цилиндрическим волнам, коаксиальным с произвольно расположенным ларморовским кружком (рис. 1.5):

$$J_m(\kappa\rho) \exp(im\varnothing) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m+n}(\kappa\rho_n) J_n(\kappa\rho') \exp(in\varphi). \quad (1.21)$$

Согласно (1.21) при  $\rho' = \rho_j$  вес  $n$ -й коаксиальной цилиндрической гармоники  $A_n^m = J_{m+n}(\kappa\rho_n) J_n(\kappa\rho_j)$ . При  $m \gg n$  первый сомножитель в этом выражении можно интерпретировать как амплитуду колебаний в месте расположения ларморовского центра, а второй — как собственно вес коаксиальной цилиндрической гармоники. Может вызвать удивление то обстоятельство, что в аргумент функции Бесселя  $J_n(\kappa\rho_j)$  входит только радиальное волновое число  $\kappa$ , а не полное  $(\kappa^2 + (m/\rho)^2)^{1/2}$ . Здесь, однако, следует учесть, что функция Бесселя  $J_m(\kappa\rho)$  приобретает волновую структуру  $J_m(\kappa\rho) \approx (2\pi/\kappa\rho)^{1/2} \cos[\kappa\rho - (\pi/2)(m - 1/2)]$  лишь при  $\rho \gg m/\kappa$ , когда полное волновое число практически совпадает с радиальным.

Азимутальное волновое число, определяемое формально как  $m/\rho$ , стремится к бесконечности при  $\rho \rightarrow 0$ . Однако в окрестности начала координат при разложении исходной волны по коаксиальным цилиндрическим гармоникам радиальная зависимость решения столь же существенна, как и азимутальная. Это становится особенно ясным, если для разложения решения по коаксиальным цилиндрическим волнам воспользоваться методом работы [37]. В этой работе решение волнового уравнения предлагалось разлагать по функциям  $\rho^m F(\rho^2) \exp(im\varnothing)$ , где  $F(\rho^2)$  — полином конечной степени  $\rho^2$ . Нетрудно заметить, что функции  $\rho^m \times \times F(\rho^2)$  близки по структуре к функциям Бесселя, поэтому с их помощью можно неплохо представить радиальную зависимость колебаний.

Для разложения по коаксиальным цилиндрическим гармоникам введем комплексную координату  $\chi = \rho \exp(i\varnothing)$ . При этом рассматриваемые функции принимают вид  $\psi_{p,m} = \chi^m F_{p,m}(|\chi|^2)$ , где индекс  $p$  дает число нулей функции  $F_{p,m}$  на интервале  $0 < \rho < \rho_0$  ( $\rho_0$  — граница плазмы). В простейшем случае  $p=0$  функция  $F_{0,m}$ , обращаясь в нуль при  $\rho = \rho_0$ , имеет вид  $F_{0,m} = 1 - (|\chi|/\rho_0)^2$ .

Величина  $\chi$  линейна по декартовым координатам  $\chi = x + iy$ , и поэтому может быть представлена в виде  $\chi = \chi_n + \chi'_$ , где  $\chi_n$  — значение  $\chi$  в центре ларморовской окружности, а  $\chi' = \rho' \exp(i\varphi)$  — значение  $\chi$ , отсчитываемое от этой точки. Очевидно, что функции  $\psi_{p,m}$  — довольно простые полиномы степени  $m$  величины  $\exp(i\varphi)$ , поэтому выделение множителя при  $\exp(im'\varphi)$ , определяющего вес  $m'$ -й цилиндрической гармоники ( $m' \leq m$ ), не составляет труда. Так, для функции  $\psi_{0,m}$  соответствующий множитель равен  $A_{m'}^m = \rho_n^{m-m'} \rho'^{m'} [C_{m-m'}^m (1 - (\rho_n^2 + \rho'^2)/\rho_0^2)] - C_{m-m'+1}^{m'-1} ((\rho_n/\rho_0)^2 - C_{m-m'-1}^{m'+1} \times \times (\rho'/\rho_0)^2)$ . В окрестности начала координат (при  $\rho_n \gg \rho'$ ), где ре-

шение имеет вид  $\sim \rho^m \exp(im\varnothing)$ , получаем  $A_m^m \approx \rho_\perp^{m-m'} \rho'^{m'}$ . Естественно, что тот же самый результат следует из (1.21).

Ко всему сказанному выше следует сделать оговорку. Дело в том, что среди плазменных колебаний имеются такие, область локализации которых удалена как от центра плазменного шнура, так и от его края. Например, дрейфовые колебания локализируются в области максимального градиента плотности плазмы. Размер области локализации может оказаться настолько малым, что в ее пределах систему можно считать практически плоской. Представление соответствующих собственных решений волнового уравнения в виде ряда по функциям Бесселя хотя и возможно, но крайне неудобно. По этой причине вывод о том, что вес коаксиальных цилиндрических гармоник определяется лишь радиальной зависимостью возмущения, может оказаться неверным. Он приближенно справедлив для отдельного члена ряда (1.21), но не для всей бесконечной суммы.

Если  $m/\rho$  значительно больше радиального волнового числа, то при определении веса коаксиальных цилиндрических гармоник координатную зависимость можно приближенно брать в виде  $\exp(im\varnothing)$ . При  $\rho_j \ll \rho$ ,  $m \gg 1$  вес  $n$ -й цилиндрической гармоники, очевидно, равен  $J_n(m\rho_j/\rho)$ . Покажем, что это выражение действительно получается из (1.21). Перейдем в (1.21) к пределу  $\chi \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ :

$$\exp(im\varnothing) = \frac{1}{r^n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m^n \rho_\perp^{m-n} \rho_j^n \exp(in\varphi). \quad (1.22)$$

Представим величину  $r$  в виде  $r = (\rho_\perp^2 - 2\rho_\perp\rho_j \cos\varphi + \rho_j^2)^{1/2}$  (см. рис. 1.5). Будем считать, что  $\rho_j/\rho_\perp \rightarrow 0$ , но  $m\rho_j/\rho_\perp \rightarrow \text{const}$ . Воспользуемся соотношениями

$$\left(1 - 2\cos\varphi \frac{\rho_j}{\rho_\perp}\right)^{m/2} \rightarrow \exp\left(-m \frac{\rho_j}{\rho_\perp} \cos\varphi\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k\left(\frac{m\rho_j}{\rho_\perp}\right) \cos k\varphi,$$

$$J_n\left(\frac{m\rho_j}{\rho_\perp}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{m\rho_j}{\rho_\perp}\right)^k I_{n+k}\left(\frac{m\rho_j}{\rho_\perp}\right),$$

получаем

$$\exp(im\varnothing) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(m \frac{\rho_j}{\rho_\perp}\right) \exp(in\varphi). \quad (1.23)$$

Соотношение (1.22) позволяет найти поправку к весу коаксиальных цилиндрических гармоник, обусловленную конечностью отношения  $(\rho_j/\rho_\perp)$ :  $A_n^m = J_n + (m\rho_j^2/4\rho_\perp^2)(J_{n-2} + J_{n+2})$ , где аргумент функций Бесселя по-прежнему равен  $m\rho_j/\rho_\perp$ .

## 1.2. Циклотронное поглощение

**1.2.1. Диэлектрическая проницаемость холодной плазмы.** Анализируя резонансное циклотронное взаимодействие, мы в основном обращали внимание на качественную сторону явления. В настоящем параграфе вычисляется коэффициент пространственного затухания циклотронных колебаний, который может служить количественной характеристикой интенсивности резонансного циклотронного взаимодействия. Как установлено выше, интенсивность резонансного циклотронного взаимодействия весьма существенно зависит от поляризации колебаний. При наличии плазмы поляризация не может задаваться произвольно, а определяется волновыми свойствами плазмы. Поэтому для удобства читателей и связности изложения рассмотрим поляризацию электромагнитных колебаний, распространяющихся по плазме (подробнее см., например, [2, 3, 5]).

Предположим, что ларморовский радиус заряженных частиц мал по сравнению с размером системы, и поэтому будем использовать приближение плоских волн, выбирая пространственно-временную зависимость переменных величин в комплексном виде  $E_{\alpha} \propto \exp(-i\omega t + ikr)$ . Для плоских волн уравнения Максвелла сводятся к системе

$$(N^2 \delta_{\alpha\beta} - N_{\alpha} N_{\beta} - \epsilon_{\alpha\beta}) E_{\beta} = 0, \quad (1.24)$$

где  $\epsilon_{\alpha\beta}$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы.

Как показано выше, физическое значение имеют не отдельные декартовы компоненты электрического поля  $E_x$ ,  $E_y$ , а, скорее, их комбинации  $E_{\pm} = E_x \pm iE_y$ , соответствующие составляющим, вращающимся в ионную и электронную стороны. В дальнейшем увидим, что и математический анализ электромагнитных колебаний в терминах  $E_+$ ,  $E_-$  значительно упрощается, а его результаты представляются в более удобной для физической интерпретации форме.

Заменяя в системе (1.24)  $E_x$ ,  $E_y$  на  $E_+$ ,  $E_-$ , приводим ее к виду [40]

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(N^2 + N_{\parallel}^2) + \epsilon_{--}; & \frac{1}{2}N_{\perp}^2 + \epsilon_{-+}; & \frac{1}{2}N_{\perp}N_{\parallel} + \epsilon_{-\parallel} \\ \frac{1}{2}N_{\perp}^2 + \epsilon_{-+}; & -\frac{1}{2}(N^2 + N_{\parallel}^2) + \epsilon_{++}; & \frac{1}{2}N_{\perp}N_{\parallel} + \epsilon_{+\parallel} \\ \frac{1}{2}N_{\perp}N_{\parallel} + \epsilon_{-\parallel}; & \frac{1}{2}N_{\perp}N_{\parallel} + \epsilon_{+\parallel}; & -\frac{1}{2}N_{\perp}^2 + \epsilon_{\parallel\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_- \\ E_+ \\ E_{\parallel} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.25)$$

Здесь  $\epsilon_{--} = (1/2)(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) + i\epsilon_{xy}$ ;  $\epsilon_{-+} = (1/2)(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})$ ;  $\epsilon_{-\parallel} = (1/2)(\epsilon_{xz} - i\epsilon_{yz})$ ;  $\epsilon_{++} = (1/2)(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) - i\epsilon_{xy}$ ;  $\epsilon_{+\parallel} = (1/2)(\epsilon_{xz} + i\epsilon_{yz})$ ;  $\epsilon_{\parallel\parallel} = (1/2)\epsilon_{zz}$ . В дальнейшем именно эту совокупность величин, не являющуюся тензором, будем обозначать  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . Соответственно индексы  $\alpha$ ,  $\beta$  будут принимать значения  $-$ ,  $+$ ,  $\parallel$ . Их иное использование будем специально оговаривать.

В практических целях (диагностика плазмы и ее нагрев), как правило, используют колебания с длиной волны, значительно превышающей ларморовский радиус заряженных частиц. На поляризацию таких колебаний эффекты, обусловленные тепловым движением заряженных частиц, оказывают лишь слабое воздействие, которое можно учесть методом последовательных приближений. В нулевом приближении, считая плазму холодной ( $T_j=0$ ), находим, что отличные от нуля компоненты  $\epsilon_{\alpha\beta}$  равны:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{--} &= 1 - \omega_{re}^2/\omega(\omega - \omega_e) - \omega_{pi}^2/\omega(\omega + \omega_i); \\ \epsilon_{++} &= 1 - \omega_{re}^2/\omega(\omega + \omega_e) - \omega_{pi}^2/\omega(\omega - \omega_i); \\ \epsilon_{\parallel\parallel} &= (1/2)(1 - \omega_{re}^2/\omega^2 - \omega_{pi}^2/\omega^2). \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

**1.2.2. Электронные циклотронные колебания холодной плазмы.** Дисперсионное уравнение, связывающее частоту колебаний с волновым вектором, получается приравнением нулю определителя системы (1.25). В случае холодной плазмы это уравнение исследовалось во многих работах [2—5, 8, 10, 12, 14, 16]. Повторять здесь соответствующий анализ не будем, постараемся лишь наглядно представить себе его результаты. По нашему мнению, этого проще всего достигнуть с помощью так называемой диаграммы Клемова — Малэли — Аллиса (диаграмма КМА) [3, 5]. По осям этой диаграммы откладываются безразмерные величины, пропорциональные плотности плазмы (по оси абсцисс) и магнитному полю (по оси ординат), обычно  $\tilde{q}_j = q_j(\omega_j/\omega)^2$  [где  $q_j = (\omega_{pj}/\omega_j)^2$ ] и  $p_j = \omega_j/\omega$  соответственно. Каждой точке диаграммы отвечает определенное состояние плазмы. Волновые свойства плазмы на диаграмме КМА характеризуются фазовыми полярами, изображающими зависимость фазовой скорости колебаний  $\omega/kc = N^{-1}$  от угла  $\theta = \widehat{\mathbf{k}\mathbf{V}_0}$ . (При заданных значениях  $n_0$  и  $\mathbf{V}_0$  угол  $\theta$  остается единственным свободным параметром в дисперсионном уравнении.) В однородной плазме фазовая поляра представляет собой фигуру вращения относительно оси, параллельной магнитному полю. Поскольку магнитное поле является аксиальным вектором фазовая поляра симметрична к отражениям относительно плоскости, проходящей через ее центр перпендикулярно магнитному полю. Следовательно, фазовая поляра имеет центр симметрии. На диаграмме КМА изображается сечение фазовой поляры плоскостью, проходящей через ось вращения, причем фазовая скорость колебаний пропорциональна расстоянию точки, лежащей на фазовой поляре, от центра симметрии. Ось вращения поляры располагается параллельно оси ординат, т. е. угол  $\theta$  следует отсчитывать от направления вертикально вверх. Некоторые колебания не могут распространяться в определенном интервале значений угла  $\theta$ , когда их показатель преломления принимает мнимое значение ( $N^2 < 0$ ). Свойства таких колебаний на диаграмме КМА никак не отражаются. Условия распространения колебаний меняются при определенных (критических) значениях параметров, например при  $\omega_j = \omega$ . На диаграмме таким критическим значениям параметров соответствуют кривые, разбивающие ее плоскость на ряд областей. Чтобы составить качественное представление о волновых свойствах плазмы и тенденциях их изменений, в каждой области изображают фазовые поляры, отнесенные к одной или нескольким точкам. Отметим, что поскольку в холодной плазме могут распространяться колебания двух типов, то каждой точке на диаграмме КМА, вообще говоря, должны соответствовать две фазовые поляры.



На рис. 1.6 изображен участок диаграммы КМА в окрестности электронного циклотронного резонанса ( $\omega \approx \omega_e$ ). Из этого рисунка следует, что при  $\omega < \omega_e$  и  $\omega_{pe} \leq \omega_e$  под любым углом  $\theta$  к магнитному полю могут распространяться колебания двух типов — обыкновенные и необыкновенные. Их фазовые поляры будем отмечать индексом *or* (ordinary) и *ex* (extraordinary). Классификация производится в соответствии с поляризацией колебаний при распространении поперек магнитного поля ( $\theta = \pi/2$ ). У обыкновенных колебаний электрическое поле параллельно  $\mathbf{B}_0$ , а магнитное перпендикулярно  $\mathbf{B}_0$ . У необыкновенных колебаний направления электрического и магнитного полей меняются местами.

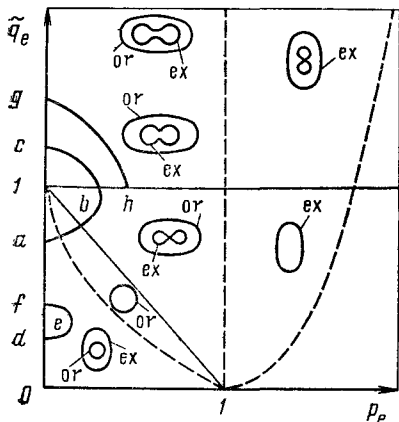


Рис 1.6. Диаграмма КМА электронных циклотронных колебаний ( $p_e = \omega_e/\omega \approx 1$ ): Кривые *abc*, *def* — траектории волновых пакетов колебаний с  $\omega \approx \omega_e$  и  $\omega \approx 2\omega_e$  соответственно в плазме токамака; кривая *gh* — траектория колебаний с  $\omega \approx \omega_e$  в плазме открытой ловушки; — — — линии резонансов ( $N^2 = \infty$ ); — — — — линии отсечки ( $N^2 = 0$ )

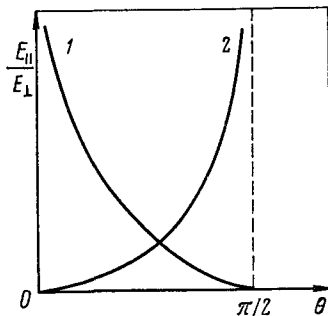


Рис. 1.7. Поляризация электронных циклотронных колебаний:

1 — необыкновенные колебания; 2 — обыкновенные колебания

Известно, что при распространении вдоль магнитного поля ( $\theta = 0$ ) электрическое поле колебаний перпендикулярно  $\mathbf{B}_0$  и вращается в электронную (вправо) или в ионную стороны (влево). Направление вращения отмечается буквами *e*, *i*. При  $p_e < 1$  и  $\theta = 0$  электрический вектор необыкновенных колебаний вращается в электронную сторону, обыкновенных — в ионную.

По мере увеличения частоты фазовая скорость необыкновенных колебаний падает (рис. 1.6), причем наиболее значительно для колебаний, распространяющихся вдоль магнитного поля ( $\theta = 0$ ). При  $\omega = \omega_e$  фазовая скорость таких колебаний обращается в нуль ( $N = \infty$ ), т. е. имеет место циклотронный резонанс. В области  $p_e < 1$  ( $\omega > \omega_e$ ), как следует из рис. 1.6, колебания с  $\theta = 0$  не распространяются, а резонанс переходит в так называемый плазменный и смещается на большой угол  $\theta$ .

Проанализируем теперь поляризацию электронных циклотронных колебаний. Из (1.25) можно получить соотношения

$$E_{-} = \frac{N^2 - \epsilon_{++}}{N^2 - \epsilon_{--}} E_{+}; \quad (1.27)$$

$$E_{\parallel} = \frac{N_{\parallel}}{N_{\perp}} \frac{N^2 - \epsilon_{++}}{2 N^2 - \epsilon_{\parallel \parallel}} E_{+}. \quad (1.28)$$

В силу простоты дисперсионного уравнения (оно квадратично по  $N^2$ ) идентификации колебаний при  $0 \rightarrow 0$  не составляет труда. Зависимость поляризации колебаний от угла  $\theta$  схематически изображена на рис. 1.7.

Случай чисто продольного распространения для необыкновенных колебаний является выделенным, так как при  $\theta=0$  поляризация скачком изменяется на чисто поперечную—электронную ( $E_- \neq 0$ ,  $E_+ = E_{\parallel} = 0$ ). С учетом эффектов теплового движения электронов изменение поляризации растягивается на конечный интервал углов  $\theta \sim (v_{Te}/c)^{1/3}$  (см. п. 1.2.5). В этом же интервале изменяется выражение для показателя преломления от  $N_{ex}^2 \approx 2\epsilon_{\parallel\parallel} / \sin^2 \theta$  к  $N_{ex}^2 \approx \epsilon_{--}$ .

Наиболее примечательная особенность колебаний с  $\omega = \omega_e$  — это отсутствие составляющей электрического поля, вращающейся в электронную сторону (исключение составляют необыкновенные колебания с  $\theta=0$ ). Ниже показано, что при учете теплового движения электронов в колебаниях появляется составляющая  $E_-$ , однако она остается малой по сравнению с  $E_+$  и  $E_{\parallel}$ . Это обстоятельство приводит к значительному ослаблению резонансного циклотронного взаимодействия и имеет своим следствием как уменьшение коэффициента затухания колебаний (см. ниже), так и подавление спонтанного теплового излучения на циклотронной частоте, см., например, [12].

Проведенный анализ относится к плазме не слишком большой плотности ( $q_e < 1$ ), колебания которой представляют наибольший интерес. Его без труда можно распространить на колебания плотной плазмы, а также на колебания на гармониках электронной циклотронной частоты.

Для колебаний, распространяющихся под углом к магнитному полю, линия  $\rho_e = 1$  ( $\omega = \omega_e$ ) на диаграмме КМА ничем не выделена. Такие колебания не «чувствуют» циклотронного резонанса. Это возможно лишь, если  $E_- = 0$ . Действительно, в рассматриваемой холодной плазме резонансное взаимодействие целиком обуславливается электронной составляющей электрического поля колебаний (см. выше). Поэтому только при  $E_- = 0$  циклотронный резонанс отсутствует. Этот вывод подтверждается (1.27), поскольку  $|\epsilon_{--}| \rightarrow \infty$  при  $\omega \rightarrow \omega_e$ , и если  $N^2$  — конечно, то  $E_- \rightarrow 0$ .

При  $E_- = 0$  дисперсионное уравнение циклотронных колебаний принимает вид

$$A_{11} = [(1/2)(N^2 + N_{\parallel}^2) - \epsilon_{++}] [(1/2)N_{\perp}^2 - \epsilon_{\parallel\parallel}] - (1/4)N_{\parallel}^2 N_{\perp}^2 = 0. \quad (1.29)$$

Здесь и в дальнейшем  $A_{\alpha\beta}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{\alpha\beta}$  матрицы волнового уравнения (1.25).

Для колебаний, распространяющихся поперек магнитного поля  $N_{\parallel} = 0$ , дисперсионное уравнение (1.28) распадается на два:  $N^2 = 2\epsilon_{++}$  и  $N^2 = 2\epsilon_{\parallel\parallel}$ . Первое дает показатель преломления необыкновенных колебаний, второе — обыкновенных. Если  $\theta \neq \pi/2$ , но  $|\theta - \pi/2| \ll 1$ , то из (1.28), (1.29) в соответствии с классификацией колебаний

$$(E_{\parallel}/E_+)_{ex} \sim \cos \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi/2} 0, \quad (E_{\parallel}/E_+)_{or} \sim 1/\cos \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi/2} \infty.$$

В другом предельном случае  $\theta \rightarrow 0$

$$(E_{\parallel}E_+)_{ex} \sim (1/\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \infty; \quad (E_{\parallel}/E_+)_{or} \sim \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0.$$

1.2.3. Ионные циклотронные колебания холодной плазмы. При анализе ионных циклотронных колебаний необходимо наряду с ионным вкладом в диэлектрическую проницаемость учитывать электронный вклад. При  $T_e = T_i = 0$ ;  $\omega \approx \omega_i$ ;  $\omega_{pi} \gg \omega_i$  отличные от нуля компоненты  $\epsilon_{\alpha\beta}$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{--} &\approx (1/2) q_i; \quad \epsilon_{++} \approx -q_i - \omega^2 \rho_i / \omega (\omega - \omega_i); \\ \epsilon_{\parallel\parallel} &\approx -q_i (1/2) m_i / m_e. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Если  $|\omega - \omega_i| \gg \omega_i$   $m_e/m_i$ , то наибольшей среди компонент (1.30) является  $\epsilon_{\parallel\parallel}$ , что обусловлено высокой подвижностью электронов вдоль основного магнитного поля. Благодаря этому электроны, быстро перераспределяясь вдоль  $\mathbf{B}_0$ , успевают уничтожить продольную компоненту электрического поля низкочастотных колебаний ( $E_{\perp} \gg E_{\parallel}$ ).

Аналогичным образом, поскольку при  $\omega \approx \omega_i$  выполняется условие  $|\epsilon_{++}| \gg |\epsilon_{--}|$ , то  $|E_{-}| \gg |E_{+}|$ . Последнее соотношение справедливо для магнитозвуковых колебаний, показатель преломления которых  $N^2 = 2\epsilon_{--} (1 + \cos^2 \theta)^{-1}$  ( $a_{11} = 0$ ) остается конечным при  $\omega = \omega_i$  (сравнить с электронными циклотронными колебаниями, распространяющимися под углом к магнитному полю, см. п. 1.2.2). На рис. 1.8 фазовая поляра магнитозвуковых колебаний отмечена буквой  $M$ .

Колебания другого типа — альфвеновские — могут распространяться, лишь если  $\omega < \omega_i$ , а угол  $\theta$  между  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{k}$  не слишком велик. При предельном значении угла  $\theta$  показатель преломления альфвеновских колебаний обращается в бесконечность, что свидетельствует о плазменном резонансе. По мере того как  $\omega \rightarrow \omega_i$ , предельное значение  $\theta_{cr}$  уменьшается, и при  $\omega = \omega_i$ , когда плазменный резонанс переходит в циклотронный,  $\theta_{cr}$  обращается в нуль (см. рис. 1.8). Это означает, что при циклотронном резонансе альфвеновские колебания могут распространяться лишь вдоль магнитного поля. Электрическое поле таких колебаний обладает чисто ионной поляризацией ( $E_{+} \neq 0$ ,  $E_{-} = E_{\parallel} = 0$ ).

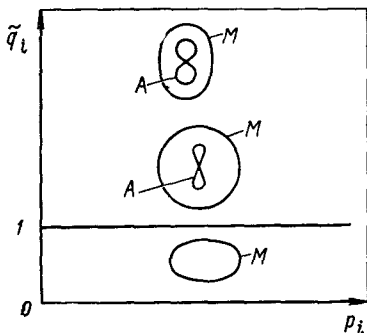


Рис. 1.8. Диаграмма КМА ионных циклотронных колебаний ( $\rho_i = \omega_i/\omega \approx 1$ )

#### 1.2.4. Диэлектрическая проницаемость плазмы с учетом тепловых эффектов.

Совокупность компонент  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , у которых индексы  $\alpha$  и  $\beta$  принимают значения плюс, минус и параллельно (см. выше), по аналогии с тензором  $\epsilon_{\alpha\beta}$  удобно представить в виде

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} b_{\alpha} b_{\beta} + \sum_{j=e, i} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \sqrt{\pi} \zeta_{0j} W(\zeta_{nj}) \Pi_{\alpha\beta, j}^{(n)} + \zeta_{0j}^2 b_{\alpha} b_{\beta} \right). \quad (1.31)$$

Здесь распределение частиц по скоростям предполагается максвелловским;  $W(\zeta_{nj})$  — интеграл вероятности от комплексного аргумента  $\zeta_{nj} = \omega - n\omega_j / \sqrt{2k_{\parallel} v_{Tj}}$ ;  $v_{Tj} = (T_j/m_j)^{1/2}$ ;  $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ ; величины  $\Pi_{\alpha\beta, e}^{(n)}$  даются выражениями

$$\left. \begin{aligned}
 \Pi_{-,-,e}^{(n)} &= \xi_{Te}^2 A'_{n-1} + A_{n-1}; \\
 \Pi_{-+,e}^{(n)} &= \Pi_{+-,e}^{(n)} = \xi_{Te}^2 A'_n; \\
 \Pi_{-||,e}^{(n)} &= \Pi_{||-,e}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{ne} \xi_{Te} (A_{n-1} - A_n); \\
 \Pi_{++,e}^{(n)} &= \xi_{Te}^2 A'_{n+1} + A_{n+1}; \\
 \Pi_{+||,e}^{(n)} &= \Pi_{||+,e}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{ne} \xi_{Te} (A_n - A_{n+1}); \\
 \Pi_{|||,e}^{(n)} &= \xi_{ne}^2 A_n.
 \end{aligned} \right\} (1.32)$$

где

$$A_n = I_n (\xi_{Te}^2) \exp(-\xi_{Te}^2); \quad \xi_{Te} = k_{\perp} v_{Te} / \omega_e.$$

Чтобы получить  $\Pi_{\alpha\beta,i}^{(n)}$ , необходимо в (1.32) произвести замены  $\xi_{Te} \rightarrow \xi_{Ti}$ ,  $n \rightarrow -n$ , при этом обозначение  $\xi_{ni}$  удобно использовать для величины  $(\omega - n\omega_i) / \sqrt{2} k_{\parallel} v_{Ti}$ . Учитывая соотношение  $A_{-n} = A_n$ , находим, что переход к ионам требует в (1.32) замены индекса  $+$  на  $-$  и обратно.

Если длина волны колебаний значительно превышает ларморовский радиус электронов, то, разлагая в (1.32)  $A_n$  по  $\xi_{Te} \ll 1$ , получаем

$$\left. \begin{aligned}
 \Pi_{-,-,e}^{(n)} &\approx \frac{n}{(n-1)!} \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^{n-1}; \\
 \Pi_{-+,e}^{(n)} &= \Pi_{+-,e}^{(n)} \approx \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^n; \\
 \Pi_{-||,e}^{(n)} &= \Pi_{||-,e}^{(n)} \approx \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^{n-1/2} \xi_{ne}; \\
 \Pi_{++,e}^{(n)} &\approx \frac{n+2}{(n+1)!} \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^{n+1}; \\
 \Pi_{+||,e}^{(n)} &= \Pi_{||+,e}^{(n)} \approx \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^{n+1/2} \xi_{ne}; \\
 \Pi_{|||,e}^{(n)} &\approx \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^n \xi_{ne}^2.
 \end{aligned} \right\} (1.33)$$

Диагональные элементы (1.33) удовлетворяют соотношениям  $\Pi_{-,-,e}^{(n)} \gg \Pi_{|||,e}^{(n)} \gg \Pi_{++,e}^{(n)}$ . Эти соотношения между элементами  $\Pi_{\alpha\beta,e}^{(n)}$  отражают иерархию интенсивности взаимодействия различных составляющих электрического поля колебаний с заряженными частицами (см. п. 1.1.2). Отметим, что наличие одного преобладающего элемента в совокупности компонент  $\epsilon_{\alpha\beta}$  существенно упрощает анализ дисперсионного уравнения циклотронных колебаний, так как позволяет в каждом конкретном случае без труда выделить наибольшие слагаемые.

**1.2.5 Поглощение на электронной циклотронной частоте** ( $\omega \approx \omega_e$ ). Мерой интенсивности поглощения электромагнитных колебаний может служить безразмерный коэффициент пространст-

венного затухания  $\kappa = (c/\omega) \text{Im } k$ . Коэффициент затухания будем определять из дисперсионного уравнения, разрешая его относительно волнового вектора, в предположении, что частота колебаний действительна. Чтобы выделить в дисперсионном уравнении наибольшие слагаемые, полезно обратиться к равенству, следующему из закона сохранения энергии:  $\kappa = (c/\omega) (Q/2S)$ . Здесь  $Q = (\omega/8\pi) \text{Im } \epsilon_{\alpha\beta} E_{\alpha}^* E_{\beta}$  — количество энергии, поглощаемой в единице объема за единицу времени;  $S$  — плотность потока электромагнитной энергии.

Антиэрмитова часть компонент  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , которая определяет поглощение электромагнитных колебаний, пропорциональна  $\text{Im } W(\xi_{1e}) \times \times \Pi_{\alpha, \beta, e}^{(1)}$ . Предположим, что выполняется условие  $\xi_{Te} \ll 1$ . В этом случае из всех компонент  $\epsilon_{\alpha\beta}$  наибольшая  $\epsilon_{--}$ , которая в холодной плазме обращается в бесконечность. Если бы в электромагнитных колебаниях составляющие  $E_{-}$ ,  $E_{+}$  и  $E_{\parallel}$  присутствовали с равным весом, то поглощение в основном определялось бы  $E_{-}$ . Однако выше было показано, что в холодной плазме ( $\xi_{Te} = 0$ ), где при циклотронном резонансе  $|\epsilon_{--}| = \infty$ , составляющая поля  $E_{-}$  обращается в нуль. Таким образом, слагаемое  $\text{Im } \epsilon_{--} |E_{-}|^2$  в выражении для  $Q$  содержит неопределенность. Неопределенность устраняется с учетом эффектов, вызываемых конечной температурой электронов. При  $T_e \neq 0$  влияние эффекта Доплера приводит к размытию циклотронного резонанса на область частот  $\delta\omega \sim k_{\parallel} v_{Te}$ . В этой области  $\epsilon_{--}$  имеет хотя и большое, но конечное значение  $|\epsilon_{--}| \sim \omega/k_{\parallel} v_{Te} \sim \sim \xi_{Te}^{-1}$ . (При оценках по порядку величины считаем, что  $k_{\parallel} \sim k_{\perp}$ .) Из верхнего уравнения системы (1.25) получаем  $E_{-} \sim \xi_{Te} E_{+}$ . Таким образом, слагаемое  $\epsilon_{--} |E_{-}|^2$  в выражении для  $Q$  имеет порядок  $\xi_{Te} |E_{+}|^2$ . Поскольку в резонансной области  $\epsilon_{-||} \sim 1$ ,  $\epsilon_{||} \sim \xi_{Te}$ , а  $E_{||} \sim E_{+}$  (1.27), такой же по порядку и вклад слагаемых, в которые входит  $E_{||}$ . В то же время в слагаемые, содержащие  $E_{+}$ , входит дополнительный малый множитель  $\xi_{Te}^2$ , и поэтому ими можно пренебречь. Следовательно, оказывается, что при приближенном вычислении  $\kappa$  достаточно учесть мнимую часть величин  $\epsilon_{--}$ ,  $\epsilon_{-||}$  и  $\epsilon_{||}$ .

Дисперсионное уравнение, получаемое приравниванием нулю определителя системы (1.25), будем решать методом последовательных приближений по малому параметру  $\xi_{Te}$ . Сначала приравняем нулю  $A_{11}$  — алгебраическое дополнение наибольшего элемента матрицы (1.25) ( $a_{11} \sim \epsilon_{--} \sim \xi_{Te}^{-1} \gg 1$ ) и получим (1.29). Это уравнение определяет показатели преломления двух типов колебаний — обыкновенных и необыкновенных при  $\omega = \omega_e$ ,  $T_e = 0$ . Остальные члены дисперсионного уравнения являются малой поправкой к основному  $a_{11} A_{11}$ . Их удобно преобразовать, используя равенство (1.29), из которого следует  $a_{22} \approx a_{33}^2 / a_{33}$ . В результате

полное дисперсионное уравнение приобретает вид [40]

$$i\sigma_{1e}A_{11} + \frac{N_{\perp}^4}{4} \frac{(N^2 + 2q_e - 1)^2}{(N_{\perp}^2 + q_e - 1)} + i\sigma_{1e} \frac{(\omega - \omega_e)}{\omega} N_{\perp}^2 \frac{(N^2 + (3/2)q_e - 1)}{(N_{\perp}^2 + q_e - 1)} = 0, \quad (1.34)$$

где  $\sigma_{1e} = (\pi/8)^{1/2} (q_e/N_{\parallel} \beta_e) W(\zeta_{1e})$ ,  $\beta_e = v_{Te}/c$ . Заметим, что обычно используется более громоздкая запись этого дисперсионного уравнения [12, § 13]. Компактный вид — (1.34) — оно приняло из-за использования при вычислениях сочетаний  $E_{\pm}$  вместо  $E_x$  и  $E_y$ .

В нулевом приближении по  $|\sigma_{1e}|^{-1} \ll 1$  уравнение (1.34) сводится к (1.29); в следующем приближении коэффициент затухания

$$\kappa = \exp \frac{1}{(8\pi)^{1/2}} \frac{\beta_e}{q_e} \cos \theta \frac{N_{\perp}^4 (N^2 + 2q_e - 1)^2}{(N_{\perp}^2 + q_e - 1) F(\theta)} V(\zeta_{1e}), \quad (1.35)$$

где необыкновенным колебаниям соответствует знак плюс, обыкновенным минус;  $F(\theta) = (4(1 - q_e)^2 \cos^2 \theta + \sin^4 \theta)^{1/2}$ ;  $V(\zeta) = \exp(-\zeta^2) |W(\zeta)|^{-2}$ ; функция  $V(\zeta)$  определяет профиль линии поглощения. В предельных случаях малых и больших значений аргумента для нее справедливы приближенные представления

$$V(\zeta) \approx \begin{cases} 1 & |\zeta| \ll 1; \\ \pi \zeta^2 \exp(-\zeta^2) & |\zeta| \gg 1. \end{cases}$$

Выражение (1.35) значительно упрощается при  $\theta \ll 1$  (малые углы) и  $\pi/2 - \theta \ll 1$  (большие углы). При  $\theta \ll 1$ , подставляя в (1.35) приближенное выражение для показателя преломления необыкновенных колебаний

$$N_{\text{ex}}^2 \approx 2(1 - q_e)/\theta^2, \quad (1.36)$$

получаем [8]

$$\kappa_{\text{ex}} \approx (2\pi)^{-1/2} (\beta_e/q_e) N^4 V(\zeta_{1e}). \quad (1.37)$$

Из (1.36), (1.37) следует, что при  $\theta \rightarrow 0$  показатель преломления  $N_{\text{ex}}$ , а вместе с ним и коэффициент затухания  $\kappa_{\text{ex}}$  неограниченно возрастают. Рост  $\kappa_{\text{ex}}$  обусловлен увеличением  $E_{\parallel} \sim \theta^{-1} E_+$  (см. рис. 1.6), а также  $E_- (E_- \sim \theta^{-2} E_+)$ . Однако при  $\theta \leq \beta_e^{1/3}$  нарушаются условия применимости метода последовательных приближений, использовавшегося при решении дисперсионного уравнения ( $N^2$  по порядку величины сравнивается с  $\sigma_{1e}$ ). В области углов  $\theta \leq \beta_e^{1/3}$  происходит переход к предельному случаю продольного распространения ( $\theta = 0$ ), когда в колебаниях отлична от нуля лишь электронная составляющая ~~электрического~~ электрического поля. Дисперсионное уравнение таких колебаний имеет вид

$$a_{11} = N^2 - 2i\sigma_{1e} = 0. \quad (1.38)$$

Уравнение (1.38), вообще говоря, довольно сложное — трансцендентное относительно  $N$ . Однако при  $\omega = \omega_e$  его решение имеет простой вид [8]:

$$N_{\text{ex}} = (\pi/2)^{1/6} \exp i(\pi/6) (q_e/\beta_e)^{1/2}. \quad (1.39)$$

Показатель преломления и коэффициент затухания обыкновенных колебаний при  $\theta \rightarrow 0$  даются выражениями

$$N_{or}^2 \approx 1 - q_e/2;$$

$$\kappa_{cr} \approx \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{9}{16} \beta_e q_e \left( \frac{1 - q_e/2}{1 - q_e} \right)^2 V(\zeta_{ie}) \theta^4.$$

Уменьшение  $\kappa_{or}$  при  $\theta \rightarrow 0$  обусловлено падением  $E_{\parallel}$  ( $E_{\parallel} \sim \theta E_+$ ) и  $E_-$  ( $E_- \sim \theta^2 E_+$ ). Отметим, что действительная часть показателя преломления  $N_{or}$  может быть получена из равенства  $a_{22} \approx -N^2 + \epsilon_+ = 0$ . Однако если из него нашли бы и мнимую часть  $\kappa_{or}$ , то получили значение, в  $\beta_e^{-2}$  раз меньшее приведенного выше.

При  $\theta \rightarrow \pi/2$  у необыкновенных колебаний  $E_-$  и  $E_{\parallel}$  уменьшаются ( $E_{\parallel} \propto \cos \theta$ ,  $E_- \propto \cos^2 \theta$ ), а у обыкновенных  $E_{\parallel}$  увеличивается ( $E_{\parallel} \propto \cos^{-1} \theta$ ) и  $E_-$  стремится к постоянному значению. В соответствии с этим ведут себя и коэффициенты затухания:

$$\kappa_{ex} \approx (8\pi)^{-1/2} (\beta_e/q_e) (2 - q_e)^2 (1 + q_e)^2 \cos \theta V(\zeta_{ie});$$

$$\kappa_{or} \approx (8\pi)^{-1/2} \beta_e q_e (\cos \theta)^{-1} V(\zeta_{ie}).$$

Чтобы получить последнее выражение из (1.34), следует использовать следующие приближенные выражения для показателей преломления, справедливые при  $\theta \rightarrow \pi/2$ :

$$N_{ex}^2 \approx 2 - q_e; \quad N_{or}^2 \approx (1 - q_e) (1 + q_e \cos^2 \theta).$$

Проведенное рассмотрение опиралось на предположение, что вклад плазмы в диэлектрическую проницаемость существенно превышает «вклад вакуума» ( $|\epsilon_{\alpha\beta}| \gg 1$ ). Между тем даже при точном выполнении резонансного условия ( $\omega = \omega_e$ ) электронный вклад не превышает по порядку отношения  $q_e/\beta_e$ . Поэтому полученные выше выражения для  $\kappa$  справедливы лишь при выполнении условия  $q_e \gg \beta_e$ . О необходимости такого ограничения свидетельствуют, в частности, выражения для  $\kappa_{ex}$ , содержащие зависимость  $\sim q_e^{-1}$ .

В плазме низкой плотности ( $q_e \ll \beta_e$ ) электроны слабо воздействуют на колебания, это воздействие можно учитывать в рамках метода последовательных приближений. В нулевом приближении световые волны имеют показатель преломления  $N=1$ . Световые волны различаются поляризацией электрического вектора. В случае вакуума отсутствует объективный критерий, по которому можно было бы выделить базисные колебания. Обычно в качестве базисных рассматривают колебания с линейной поляризацией электрического вектора, лежащего в плоскости  $XOZ$  и перпендикулярного этой плоскости, т. е. параллельного  $OY$  (см. рис. 1.3). При наличии плазмы базисными естественно считать колебания, наиболее резко различающиеся по затуханию. Такой выбор происходит автоматически при анализе уравнений Максвелла, записанных в терминах  $E_-$ ,  $E_+$ ,  $E_{\parallel}$  (1.25). Оказывается, что при отсутствии плазмы возможны колебания, у которых отличны от нуля все три составляющие, и колебания с  $E_- = 0$ . Колебания первого

типа естественно отождествить с необыкновенными; коэффициент затухания таких колебаний, как несложно показать, равен [8]:

$$\kappa_{\text{ex}} \approx (\pi/32)^{1/2} (q_e/\beta_e) \exp(-\zeta_{1e}^2) (1 + \cos^2 \theta) / \cos \theta,$$

а колебания второго типа — с обыкновенными:

$$\kappa_{\text{ог}} \approx \left(\frac{\pi}{32}\right)^{1/2} q_e \beta_e \frac{\sin^4 \theta}{\cos \theta (1 + \cos^2 \theta)} \zeta_{1e}^2 \exp(-\zeta_{1e}^2).$$

**1.2.6. Поглощение на гармониках электронной циклотронной частоты** ( $\omega \approx n\omega_e$ ,  $n \geq 2$ ). Резонансное взаимодействие на гармониках электронной циклотронной частоты всецело обусловлено эффектами конечного ларморовского радиуса электронов (см. выше). При анализе колебаний с  $\omega \approx n\omega_e$  ( $n \geq 2$ ), как и в п. 1.2.5, будем считать, что выполняется условие  $\xi_{Te} \ll 1$ . В этом случае резонансные эффекты оказывают слабое воздействие на распространение колебаний и могут быть учтены в рамках метода последовательных приближений. В нулевом приближении по  $\xi_{Te}^2$  резонансное взаимодействие отсутствует, и поэтому область частот  $\omega \approx n\omega_e$  ничем не выделена. По этой причине электрическое поле колебаний с  $\omega \approx n\omega_e$ , вообще говоря, включает в себя все три составляющие  $E_{\perp}$ ,  $E_{\parallel}$ ,  $E_{+}$  с равными по порядку весами. Ввиду того что электроны наиболее эффективно взаимодействуют с электронной составляющей электрического поля, при вычислении коэффициента затухания можно учесть лишь  $\text{Im} \epsilon_{\perp}$ .

Ограничимся рассмотрением предельных случаев малых ( $\theta \ll 1$ ) и больших ( $\pi/2 - \theta \ll 1$ ) углов, когда выражения для коэффициента затухания принимают сравнительно простой вид. При  $\theta \rightarrow 0$  поляризация необыкновенных колебаний стремится к чисто электронной, поэтому дисперсионное уравнение принимает вид  $a_{11} = 0$ . Из этого уравнения получаем следующие выражения для показателя преломления и коэффициента затухания:

$$\left. \begin{aligned} N_{\text{ex}}^2 &\approx 1 - q_e/n(n-1); \\ \kappa_{\text{ex}} &\approx (\pi/8)^{1/2} \frac{1}{n!} \left( \frac{\xi_{Te}^2}{2} \right)^{n-1} \frac{q_e}{\beta_e N^2} \exp(-\zeta_{ne}^2), \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

где  $\xi_{Te} = n\beta_e N \sin \theta$ ;  $\zeta_{ne} = (\omega - n\omega_e)/\omega N \cos \theta / 2\beta_e$ . Коэффициент затухания падает с переходом на высшие гармоники, а также при уменьшении угла  $\theta$  и температуры плазмы.

При  $\theta \rightarrow 0$  поляризация обыкновенных колебаний переходит в ионную, поэтому они поглощаются слабее необыкновенных.

Оставляя в дисперсионном уравнении слагаемые с наименьшей степенью  $\sin \theta \rightarrow 0$ , получаем из него следующее выражение для коэффициента затухания:

$$\kappa_{\text{ог}} \approx \frac{1}{2V} \left( \frac{a_{23}a_{13} - a_{12}a_{33}}{a_{11}a_{33}} \right)^2 \text{Im} \epsilon_{\perp}. \quad (1.41)$$

Здесь лишь в  $\text{Im} \epsilon_{\perp}$  необходимо учитывать эффекты конечного ларморовского радиуса электронов.



При  $\theta \rightarrow 0$  показатель преломления определяется уравнением  $a_{22} = 0$  и равен  $N_{ор}^2 = 1 - q_e/n(n+1)$ . Подставляя это выражение в (1.41), приводим его к виду

$$\kappa_{ор} \approx \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{1}{16} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n!} \left(\frac{\xi_{Te}^2}{2}\right)^{n-1} \frac{q_e}{\beta_e} \times \\ \times \frac{N^2}{(1 - q_e/n)^2} \sin^4 \theta \exp(-\xi_{ne}^2). \quad (1.42)$$

Из сопоставления (1.40) и (1.41) следует, что различие в поляризации обыкновенных и необыкновенных колебаний приводит к появлению  $\kappa_{ор}$  малого множителя  $\sin^4 \theta$ .

При  $\theta \rightarrow \pi/2$  у необыкновенных колебаний пропадает продольная составляющая электрического поля, и поэтому дисперсионное уравнение принимает вид  $A_{33} = 0$ . Из него получаем

$$\left. \begin{aligned} N_{ex}^2 &\approx \left(1 - \frac{q_e}{n(n-1)}\right) \left(1 - \frac{q_e}{n(n+1)}\right) \left(1 - \frac{q_e}{n^2-1}\right)^{-1}; \\ \kappa_{ex} &\approx \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{n!} \left(\frac{1 - q_e/n(n+1)}{1 - q_e/(n^2-1)}\right)^2 \times \\ &\times \frac{q_e}{\beta_e \cos \theta} \frac{1}{N^2} \left(\frac{\xi_{Te}^2}{2}\right)^{n-1} \exp(-\xi_{ne}^2). \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Отметим, что необыкновенные колебания не распространяются ( $N_{ex}^2 < 0$ ) при  $n(n-1) < q_e < n^2-1$  и  $q_e > n(n+1)$ . При  $q_e = n^2-1$  имеет место плазменный резонанс ( $N_{ex}^2 = \infty$ ). Область значений  $q_e$ , близких к резонансному, требует специального анализа [8].

У обыкновенных колебаний при  $\theta \rightarrow \pi/2$  электрическое поле переходит в чисто продольное, поэтому коэффициент затухания, как и при  $\theta \rightarrow 0$ , существенно меньше  $\kappa_{ex}$ . Для его вычисления выделим в дисперсионном уравнении слагаемые с наименьшей степенью  $\cos \theta \ll 1$ . В результате приходим к следующему выражению для коэффициента затухания:

$$\kappa_{ор} \approx (1/N_{ор}) (a_{22}a_{13} + a_{13}a_{23})^2 A_{33}^{-2} \text{Im } \epsilon_{-}. \quad (1.44)$$

Здесь всюду, кроме  $\text{Im } \epsilon_{-}$ , можно использовать приближение холодной плазмы, положив  $\xi_{Te} = 0$ . Из (1.44) получаем

$$\kappa_{ор} \approx \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 \cos^2 \theta N^2}{n! q_e \beta_e} \left(1 - \frac{q_e}{n(n+1)}\right) \times \\ \times \left(\frac{\xi_{Te}^2}{2}\right)^{n-1} \exp(-\xi_{ne}^2),$$

где показатель преломления  $N_{ор}$  определяется уравнением  $a_{33} = 0$  и равен  $N_{ор}^2 \approx 1 - q_e/n^2$ .

**1.2.7. Поглощение электронных циклотронных колебаний с учетом релятивизма** ( $\theta \approx \pi/2$ ). Проведенный анализ справедлив при выполнении условия  $\pi/2 - \theta \gg \beta_e$ . В противном случае станется существенной неучитываемая выше релятивистская зависимость

электронной циклотронной частоты от энергии  $\omega_e r \approx \omega_e (1 - v^2/2c^2)$ . Действительно, эффект Доплера приводит к размытию линии циклотронного поглощения на область частот порядка  $kv_T \cos \theta \sim \beta_e \times \times \cos \theta$ , в то время как релятивистская зависимость циклотронной частоты от энергии — на  $\omega_e \beta_e^2$ . Эффект Доплера преобладает при выполнении приведенного выше условия.

Обратный предельный случай почти поперечного распространения ( $\pi/2 - \theta \ll \beta_e$ ) анализировался в большом числе работ, см., например, [41—44]. Выражение для тензора диэлектрической проницаемости при  $\xi_{Te} \ll 1$ ,  $\beta_e \ll 1$  можно найти, например, в [45, 46], Составленные с его помощью величины  $\epsilon_{\alpha\beta}$  вблизи  $n$ -й циклотронной гармоники имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{--} &\approx 1 - 2B_n F_{n+3/2}; \\ \epsilon_{-+} = \epsilon_{+-} &\approx -(1/n) \xi_{Te}^2 F_{n+5/2}; \\ \epsilon_{++} &\approx 1 - \frac{q_e}{n(n+1)} - B_n \frac{n+2}{2n^2(n+1)} \xi_{Te}^4 F_{n+7/2}; \\ \epsilon_{\parallel\parallel} &\approx (1/2)(1 - q_e/n^2) - (1/2n^2) B_n \xi_{Te}^2 F_{n+5/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

$$\text{Здесь } B_n = \frac{q_e}{\beta_e^2} \xi_{Te}^{2(n-1)} \frac{1}{2^n n!}; \quad \zeta_{ne}^r = \frac{1}{\beta_e^2} \frac{\omega - n\omega_e}{\omega}; \quad F_l = \sum_{m=0}^{l-3/2} (-\zeta_{ne}^r)^m \times \\ \times \frac{\Gamma(l-m-1)}{\Gamma(l)} - \frac{i\pi}{\Gamma(l)} (-\zeta_{ne}^r)^{l-1} W((- \zeta_{ne}^r)^{1/2}).$$

В (1.45) оставлены первые члены разложения по малому параметру  $\xi_{Te}$ . Если выполняется условие  $\pi/2 - \theta \ll \beta_e$ , то при вычислении коэффициентов затухания циклотронных колебаний распространение можно считать чисто поперечным, в частности величины  $\epsilon_{-\parallel}$  и  $\epsilon_{+\parallel}$  положить равными нулю. Знак корня  $(-\zeta_{ne}^r)^{1/2}$  в выражении для  $F_l$  определен таким, чтобы величина  $(-\zeta_{ne}^r)^{1/2}$  была мнимой и положительной при  $\omega > n\omega_e$ . В этом случае функции  $F_l$  и  $W$  действительны и, следовательно, в области частот  $\omega > n\omega_e$  поглощение отсутствует. Этот результат вполне естествен, поскольку с учетом релятивизма циклотронная частота  $\omega_e r$  меньше  $\omega_e$ .

Учет релятивизма не меняет общей картины поляризации колебаний. Так, при  $\omega \approx \omega_e$  у необыкновенных колебаний ионная составляющая значительно превышает электронную  $E_- \sim \beta_e^2 E_+$ , поэтому при вычислении коэффициента затухания необходимо учитывать мнимые части как у  $\epsilon_{--}$ , так и у  $\epsilon_{-+}$  и  $\epsilon_{++}$ . В то же время при резонансе на гармониках циклотронной частоты  $E_- \sim E_+$ . В этом случае коэффициент затухания определяется  $\text{Im} \epsilon_{--}$ .

При чисто поперечном распространении из (1.24) получаем следующее дисперсионное уравнение необыкновенных колебаний:

$$N_{ex}^2 = 2(\epsilon_{--}\epsilon_{++} - \epsilon_{-+}^2) / (\epsilon_{--} + \epsilon_{++} + 2\epsilon_{-+}). \quad (1.46)$$

В случае  $\omega \approx \omega_e$ , используя соотношение  $|\epsilon_{--}| \gg |\epsilon_{++}|, |\epsilon_{-+}|$ , приводим его к виду

$$N_{ex}^2 \approx 2\epsilon_{++} - 2(\epsilon_{--} + \epsilon_{++})^2 / \epsilon_{--}. \quad (1.47)$$

Учитывая в (1.47) слагаемые порядка  $\beta_e^2$ , находим следующее выражение для коэффициента затухания [45]:

$$\kappa_{ex} \approx -\beta_e^2 N_{ex}^3 \left( \frac{3}{8} q_e F'_{9/2} - \frac{1}{4q_e} \operatorname{Im} \left( \frac{1 - q_e F_{7/2}}{F_{5/2}} \right) \right) - \kappa_{ex}^{(0)} D,$$

$$\text{где } N_{ex}^2 = 2 - q_e; \quad \kappa_{ex}^{(0)} = -\frac{1}{2^{1/2}} \left( 1 - \frac{q_e}{2} \right) \frac{\beta_e^2}{q_e} \frac{F'_{5/2}}{|F_{5/2}|^2}; \quad D = 1 + \\ + 2q_e \left( \frac{2}{5} \zeta_{1e}^r F'_{5/2} + F'_{7/2} \right) + q_e^2 \left( F'_{7/2} - \frac{4}{25} \zeta_{1e}^r F'_{5/2} + \frac{4}{5} \zeta_{1e}^r F'_{5/2} F'_{7/2} + \frac{6}{35} \zeta_{1e}^r \right) \\ \times |F_{5/2}|^2); \quad F'_i = \operatorname{Re} F_i; \quad F''_i = \operatorname{Im} F_i.$$

При вычислении  $\kappa_{ex}$ , как и в п. 1.2.5, считали, что вклад электронов в диэлектрическую проницаемость существенно превышает «вакуумный вклад». Это предположение справедливо при  $q_e \gg \beta_e^2$ . В обратном предельном случае ( $q_e \ll \beta_e^2$ ), учитывая вклад плазмы как малую поправку, находим

$$\kappa_{ex} \approx \frac{\pi}{4\Gamma(5/2)} \frac{q_e}{\beta_e^2} (-\zeta_{1e}^r)^{3/2} \exp(\zeta_{1e}^r).$$

При резонансе на гармониках циклотронной частоты из (1.46) получаем [45]

$$\kappa_{ex} \approx \frac{\pi}{2^{1+n} n! \Gamma(n+3/2)} \frac{q_e}{N\beta_e^2} \left( \frac{1 - q_e/n(n+1)}{1 - q_e/(n^2-1)} \right)^2 \xi_{Te}^2 (n-1) (-\zeta_{ne}^r)^{n+1/2} \exp(\zeta_{ne}^r),$$

где показатель преломления дается формулой (1.43).

Обыкновенные колебания при  $\theta = \pi/2$  имеют чисто продольную поляризацию, и поэтому описываются дисперсионным уравнением

$$N^2 = 2\epsilon_{\parallel\parallel}, \quad (1.48)$$

откуда [45]  $N_{or}^2 = 1 - q_e/n^2$  и

$$\kappa_{or} \approx \frac{\pi}{2^{1+n} n! \Gamma(n+5/2)} \frac{q_e}{N\beta_e^2} \xi_{Te}^{2n} (-\zeta_{ne}^r)^{n+3/2} \exp(\zeta_{ne}^r).$$

**1.2.8. Поглощение на ионной циклотронной частоте ( $\omega \approx \omega_i$ ).** При анализе ионных циклотронных колебаний, как и в п. 1.2.3, будем считать, что электроны уничтожают продольную компоненту электрического поля. В этом случае дисперсионное уравнение принимает вид  $A_{33} = 0$ . В холодной плазме ( $\xi_{Ti} = 0, \zeta_{1e} = \infty$ ) оно распадается на два: уравнение альфвеновских колебаний  $a_{22} = 0$  и уравнение магнитозвуковых колебаний  $a_{11} = 0$ , имеющих ионную и электронную поляризацию соответственно. Естественно, что альфвеновские колебания взаимодействуют с ионами гораздо эффективнее, чем с электронами.

тивнее, чем магнитозвуковые. В области ионного циклотронного резонанса альфвеновские колебания могут распространяться лишь под очень малым углом к магнитному полю ( $\theta \ll 1$ ). Дисперсионное уравнение таких колебаний совпадает с (1.38), а его решение — с (1.39), если у величин, входящих в (1.38), (1.39), заменить индекс  $e$  индексом  $i$  и соответственно  $q_e = (\omega_{pe}/\omega_e)^2$  на  $q_i = (\omega_{pi}/\omega_i)^2 = (c/c_A)^2$ , где  $c_A$  — альфвеновская скорость.

Поглощение магнитозвуковых колебаний обусловлено ионной составляющей электрического поля, которая появляется при учете эффектов, вызываемых тепловым разбросом ионов по скоростям. (Сравнить с поглощением электронных циклотронных колебаний, распространяющихся под углом к магнитному полю, см. п. 1.2.5.) Дисперсионное уравнение магнитозвуковых колебаний  $A_{33}=0$  представим в виде  $a_{11} = a_{12}^2/a_{22}$ . Его правую часть следует рассматривать как малую поправку, а эффекты теплового движения учитывать лишь в  $a_{22}$ , при этом получаем [8]

$$N_M^2 \approx (c/c_A)^2 (1 + \cos^2 \theta)^{-1}; \quad (1.49)$$

$$\kappa_M \approx \frac{1}{(8\pi)^{1/2}} \frac{\sin^4 \theta \cos \theta}{(1 + c \cos^2 \theta)^3} \beta_i \left( \frac{c}{c_A} \right)^2 V(\zeta_{1i}). \quad (1.50)$$

**1.2.9. Поглощение на гармониках ионной циклотронной частоты** ( $\omega \approx n\omega_i$ ,  $n \geq 2$ ). В области частот  $\omega = n\omega_i$  ( $n \geq 2$ ) существует лишь одна ветвь колебаний — магнитозвуковая. У этих колебаний, как и у электронных циклотронных колебаний с  $\omega \approx n\omega_e$  ( $n \geq 2$ ), электронная и ионная составляющие электрического вектора имеют сопоставимый вес. Естественно, что поглощение ионных циклотронных колебаний обусловлено действием ионной составляющей.

В пренебрежении эффектами конечного ларморовского радиуса ионов дисперсионное уравнение  $A_{33}=0$  дает

$$N_M^2 = \frac{1}{2(n^2 - 1) \cos^2 \theta} \left( \frac{c}{c_A} \right)^2 \{ [(1 + \cos^2 \theta)^2 + 4 \cos^2 \theta (n^2 - 1)]^{1/2} - (1 + \cos^2 \theta) \}.$$

Учитывая далее  $\text{Im} \epsilon_{+}$  как малую поправку, получаем коэффициент затухания [8]:

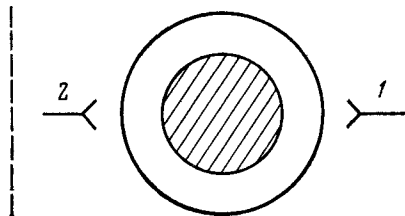
$$\begin{aligned} \kappa_M \approx & \left( \frac{\pi}{32} \right)^{1/2} \frac{1}{n!} \frac{1}{N_M^2} \left( \frac{c}{c_A} \right)^2 \left( \frac{\xi_{Ti}^2}{2} \right)^{n-1} \exp(-\zeta_{ni}^2) \times \\ & \times \frac{[N_M^2 (1 + \cos^2 \theta) - 2/(n+1)(c/c_A)^2]}{((1 + \cos^2 \theta)^2 + 4 \cos^2 \theta (n^2 - 1))^{1/2}}. \end{aligned}$$

При  $\theta \rightarrow 0$  коэффициент затухания обращается в нуль по закону  $\theta^{2(n+1)}$ , причем множитель  $\xi_{Ti}^{2(n-1)}$  дает  $\theta^{n-2}$ , а разность в скобках в числителе —  $\theta^4$ . Последний коэффициент отражает уменьшение составляющей с ионной поляризацией. Значение  $\theta = \pi/2$  среди остальных значений угла ничем не выделено.

**1.2.10. Циклотронный нагрев (выбор колебаний). Нагрев электронов.** Нагрев циклотронными колебаниями широко используется в физике плазмы. Например, в токамаках, где токовый нагрев недостаточен для достижения термоядерных температур, используют оба варианта циклотронного нагрева (ионный и электронный). Применяют циклотронный нагрев и в замкнутых ловушках другого типа — стеллараторах. Имеется ряд предложений относительно использования метода циклотронного нагрева в наиболее перспективной модификации открытых ловушек — амбиоплярных ловушках.

С помощью циклотронных колебаний можно не только нагревать уже имеющуюся плазму, но и создавать ее самое — осуществлять так называемый циклотронный разряд (обычно электронный). Такой метод создания плазмы все чаще используют в токамаках [47, 48], где при обычном способе ионизации газа индукционным электрическим полем на это приходится тратить дефицитные «вольт-секунды».

Рис. 1.9. Сечение токамака плоскостью, проходящей через ось симметрии (— — —). Сечение плазменного шнура заштриховано; 1, 2 — излучатели. Магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка и монотонно спадает от оси симметрии



С помощью коротковолновых электронных циклотронных колебаний можно выделять тепловую энергию в любой наперед заданной области плазмы. В частности, можно нагревать центральные области, тепловая энергия которых используется в термоядерных установках с максимальной эффективностью. Эта возможность обязана неоднородности магнитного поля ловушек, применяемых для удержания плазмы. Неоднородность магнитного поля приводит к тому, что резонансное условие  $\omega = n\omega_c(\mathbf{r})$  выполняется на некоторой поверхности. Очевидно, что энергия выделяется в месте пересечения траектории электромагнитного луча с этой поверхностью.

Выбирая колебания, которые предполагается использовать для циклотронного нагрева, следует позаботиться о том, чтобы источник электромагнитного излучения и резонансная точка не были разделены областью непрозрачности, а циклотронное поглощение было достаточно эффективным.

Покажем [23, 49], как на основании этих соображений осуществляется выбор колебаний для нагрева плазмы в системах с замкнутыми и разомкнутыми силовыми линиями магнитного поля, характерными представителями которых являются токамаки и открытые ловушки. Токamak является аксиально-симметричной системой (рис. 1.9). Предположим сначала, что источник электромагнитного излучения расположен с наружной стороны тора (положение 1), а электромагнитный луч распространяется перпендикулярно силовым линиям магнитного поля. Траектории луча в пространстве, занятом плазмой, соответствует определенная кривая на диаграмме КМА (см. рис. 1.6). Принимая во внимание пространственную зависимость плотности плазмы и магнитного поля, находим, что в интересующем нас случае траектория луча на диаграмме КМА будет даваться кривой *abc*. Эта кривая построена при условии  $q_e(\mathbf{r}) < 1$ .

Из рис. 1.6 следует, что между границей плазмы и точкой циклотронного резонанса лежит точка отсечки необыкновенных колебаний, от которой они час-

точно отражаются. Область непрозрачности заканчивается точкой плазменного резонанса ( $N=\infty$ ), где необыкновенные колебания трансформируются в коротковолновые плазменные, поглощающиеся в окрестности точки трансформации. Из-за отражения и трансформации до точки циклотронного резонанса (центр плазменного шнура) может дойти лишь небольшая часть первоначальной энергии необыкновенных колебаний. Эти затруднения можно устранить, если переместить излучатель внутрь тора (положение 2 на рис. 1.9), при этом направление движения по кривой  $abc$  на диаграмме КМА изменится на обратное. Однако такое расположение излучающей антенны технически неудобно. Вместе с тем коэффициент поглощения необыкновенных колебаний при прохождении через область циклотронного резонанса под прямым углом к магнитному полю небольшой ( $\eta \sim \beta_e^4$ ) (см. п. 2.2.3). Взаимодействие усиливается с уменьшением угла между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ . Однако при этом возникает новая трудность. Дело в том, что из-за эффекта Доплера увеличение  $k_{\parallel} = k \cos \theta$  приводит к расширению резонансной зоны. Так, высокоэнергетические электроны, продольная скорость которых удовлетворяет условию  $v_{\parallel}/c \geq \Delta\omega_e/\omega_e$ , взаимодействуют с колебаниями на периферии плазменного шнура (здесь  $\Delta\omega_e$  — изменение циклотронной частоты

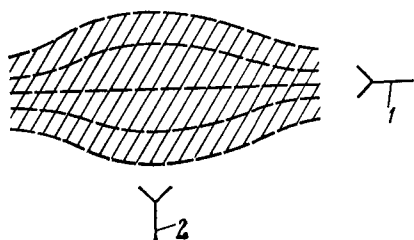


Рис. 1.10. Сечение аксиально-симметричной открытой ловушки плоскостью, проходящей через ось симметрии. Область, занятая плазмой, заштрихована, силовые линии магнитного поля нанесены пунктиром (1, 2 — излучатели)

в области, занятой плазмой). В результате появляется опасность, что циклотронные колебания не достигнут центра шнура. Отметим также, что условие отсеки необыкновенных колебаний, имеющее вид  $\omega_{pe}^2 = \omega(\omega - \omega_e)$ , не зависит от угла  $\theta$ . Поэтому и при  $\theta \neq \pi/2$  излучатель следует располагать внутри тора. Все эти соображения показывают, что использование для циклотронного нагрева плазмы необыкновенных колебаний с частотой  $\omega \approx \omega_e$ , по-видимому, малоэффективно. Более привлекательными представляются обыкновенные колебания. Действительно, обыкновенные колебания могут беспрепятственно дойти до центра плазменного шнура, а их взаимодействие с электронами примерно в  $\beta_e^{-2}$  раз сильнее (см. п. 2.2.3). Однако с повышением плотности плазмы точка циклотронного резонанса может попасть в область непрозрачности обыкновенных колебаний (точка  $b$  кривой  $abc$  перемещается за прямую  $q_e=1$ ). В этом случае необходимо увеличивать частоту колебаний, переходя на гармоники электронной циклотронной частоты, и использовать для нагрева необыкновенные колебания. Действительно, при  $\omega = n\omega_e$  ( $n \geq 2$ ) и  $\theta = \pi/2$  выполняется соотношение  $\kappa_{ex}/\kappa_{or} \sim \sim \beta_e^{-2}$ , а критическая плотность, за которой происходит отсека необыкновенных колебаний, возрастает с номером гармоники  $q_{e,cr} = n(n-1)$ . На рис. 1.6 изображена траектория электромагнитного луча с  $\omega \approx 2\omega_e$  при  $q_e(r) < 2$  (кривая  $def$ ).

Для нагрева электронов в адиабатических ловушках удобно использовать необыкновенные колебания с  $\omega \approx \omega_{e,min}$ , располагая излучатель у торца ловушки (положение 1 на рис. 1.10). Распространяясь вдоль магнитного поля, необыкновенные колебания свободно подходят к точке циклотронного резонанса (кривая  $gh$  на рис. 1.6), где весьма интенсивно поглощаются электронами (см.

п. 1.2.5). Заметим, однако, что в ловушках с малым пробочным отношением, когда выполняется условие  $\Delta\omega_e/\omega_e \leq \beta_e$ , где  $\Delta\omega_e$  — изменение циклотронной частоты в пределах ловушки, колебания могут не дойти до центра системы ввиду поглощения на высокоэнергетических электронах. В этом случае излучатель следует переместить в положение 2. Проблемы, возникающие при распространении колебаний поперек магнитного поля, уже обсуждалась выше.

Эксперименты по нагреву плазмы электронными циклотронными колебаниями довольно многочисленны, однако они проводятся в сложных условиях реальных установок и их целью является получение практического результата (нагрев плазмы), а не изучение закономерностей резонансного циклотронного взаимодействия. Поэтому полученные в них данные трудно использовать для проверки теории, изложенной в предыдущих подразделах. Вместе с тем ряд экспериментов был проведен на небольших лабораторных установках специально с целью изучения свойств электронных колебаний. Для создания плазмы обычно использовали два способа: газовый разряд или поверхностную ионизацию щелочных металлов на накаливаемой пластине из тугоплавкого металла (*Q*-машины). Получаемая плазма образовывала шнур, вытянутый вдоль магнитного поля.

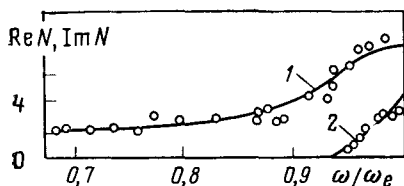


Рис. 1.11

Рис. 1.11. Зависимость показателя преломления от частоты для электронных циклотронных колебаний, распространяющихся вдоль магнитного поля:

Разряд в Ar, давление газа  $6,6 \cdot 10^{-3}$  Па ( $5 \cdot 10^{-5}$  мм рт. ст.);  $T_e = 5,2$  эВ,  $\omega_{pe}/\omega = 1,5$ ; сплошные линии — расчет по (1.38); 1 —  $\text{Re}N$ ; 2 —  $\text{Im}N$

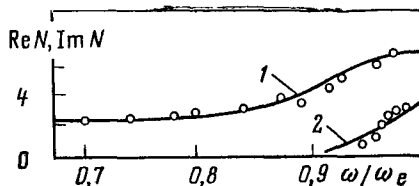


Рис. 1.12

Рис. 1.12. То же, что на рис. 1.11, при давлении  $1,33 \cdot 10^{-2}$  Па ( $1 \cdot 10^{-4}$  мм рт. ст.);  $T_e = 17$  эВ;  $\omega_{pe}/\omega = 1,7$

В таких системах особенно удобно изучать колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля ( $k_{\perp} = 0$ ). При  $k_{\perp} = 0$  колебания резонансно взаимодействуют с электронами лишь на основной гармонике электронной циклотронной частоты. Колебания с  $k_{\perp} = 0$ ,  $\omega \approx \omega_e$ , распространяющиеся в однородном магнитном поле, исследованы довольно подробно [50—52] (несмотря на присутствие в заглавии некоторых из этих работ термина «магнитный берег», неоднородность магнитного поля в условиях экспериментов не оказывала заметного воздействия на колебания.) Обнаружено хорошее соответствие между предсказаниями теории и результатами эксперимента (см., например, рис. 1.11, 1.12, взятые из [50]). Сопоставление рисунков показывает, что с ростом  $T_e$  расширяется область частот, в которой  $\text{Im}N \neq 0$ .

В заключение отметим, что подобные эксперименты удобно проводить с электронными циклотронными колебаниями, для которых из-за малой длины волны (обычно 0,1—1 см) справедливо лучевое приближение. В случае длинноволновых ионных циклотронных колебаний возбуждался бы сразу весь плазменный объем, и поэтому сведения о коэффициенте пространственного затухания пришлось бы извлекать из данных измерений добротности плазменного объема.

Нагрев ионов. Метод циклотронного нагрева ионов развивался главным образом в применении к замкнутым системам — токамакам и стеллараторам. Дело в том, что в открытых ловушках плазма, как правило, создается инжекцией быстрых нейтральных атомов; их ионизация дает высокоэнергетические ионы, нагревать которые нет необходимости. В то же время при токовом нагреве плазмы в токамаках necessarily греются электроны, ионы же получают энергию от электронов лишь в результате столкновений с ними. Следует, однако, отметить, что в трехпробочных — амбиполярных — открытых ловушках высокоэнергетические ионы занимают лишь концевые ловушки, а энергия ионов в сред-

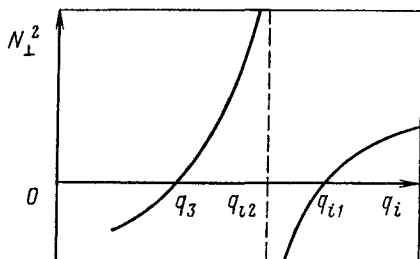


Рис. 1.13. Зависимость  $N_{\perp}^2$  от  $q_i$ :

Точки отсечки  $q_{i1,3} = N_{\parallel}^2 (1 \pm 1/p_i)$ ; точка альфвеновского резонанса  $q_{i2} = N_{\parallel}^2 (1 + 1/p_i^2)$

ней ловушке довольно низка. Их можно нагревать циклотронными колебаниями [53].

В области частот  $\omega \approx \omega_i$  имеются две ветви колебаний: альфвеновские и магнитозвуковые. Альфвеновские колебания обладают ионной поляризацией электрического вектора и поэтому весьма интенсивно взаимодействуют с ионами (см. п. 1.2.3 и 1.2.8). Однако имеются трудности как в «доставке» альфвеновских колебаний к центру плазменного шнура, так и в создании условий, обеспечивающих их поглощение в этой области.

Антенны, возбуждающие колебания, располагаются вне плазмы у стенок камеры. По мере проникновения колебаний в плазму изменяется лишь их поперечное волновое число  $k_{\perp}$ , в то время как  $k_{\parallel}$  сохраняет свое вакуумное значение, определяемое геометрией антенны. (Стенки камеры обычно параллельны  $\mathbf{B}_0$ , поэтому плазменный шнур вытянут вдоль  $\mathbf{B}_0$ .) В силу довольно большой длины волны колебаний лучевое приближение неприменимо для их описания, и вместо весьма наглядной диаграммы КМА приходится прибегать к прямому анализу дисперсионного уравнения. При  $|\epsilon_{\parallel\parallel}| \approx (\omega_{pe}/\omega)^2 \gg |\epsilon_{+}|, |\epsilon_{-}|$  дисперсионное уравнение можно представить в следующем приближенном виде [3]:

$$N_{\perp}^2 \cos^2 \theta - N_{\perp}^2 (1 + \cos^2 \theta) \omega_{pi}^2 / (\omega_i^2 - \omega^2) + \omega_{pi}^4 / (\omega_i^2 - \omega^2) = 0.$$

Из него следует

$$N_{\perp}^2 = [p_i^2 (q_i - N_{\parallel}^2)^2 - N_{\parallel}^4] / [p_i^2 (q_i - N_{\parallel}^2) + N_{\parallel}^2],$$

где  $q_i = (\omega_{pi}/\omega_i)^2$ ;  $p_i = \omega_i/\omega$ .

На рис. 1.13 изображена зависимость  $N_{\perp}^2$  от  $q_i \sim n_0$  при  $p_i = \omega_i/\omega > 1$ . Реальному плазменному шнуру может отвечать лишь часть этой зависимости, соответствующая интервалу  $q_i < q_{i,\max}$ , где  $q_{i,\max}$  — значение  $q_i$  в центре шнура. Наличие зоны непрозрачности при малых  $q_i$ , т. е. у границы шнура, затрудняет проникновение колебаний в плазму. Альфвеновские колебания распространяются в левой области прозрачности. В точке альфвеновского резонанса ( $N_{\parallel}^2 = \omega_{pi}^2 / (\omega_i^2 - \omega^2)$ , т. е.  $q_i = N_{\parallel}^2 (1 - p_i^{-2})$ ) они трансформируются в коротковолновые плазменные. При  $q_i > N_{\parallel}^2 (1 + p_i^{-1})$  располагается вторая область про-



зрачности. Здесь колебания становятся магнитозвуковыми. Действительно, зависимость на рис. 1.2.8 смещается по оси  $q_i$  с изменением  $N_{\parallel}$ . При достаточно больших значениях  $N_{\parallel}$  область прозрачности альфвеновских колебаний может оказаться в таком интервале изменения  $q_i$ , который для меньших  $N_{\parallel}$  соответствовал второй области прозрачности. Это отражает двузначный характер зависимости  $N(p_i, q_i, \theta)$ , обусловленный наличием альфвеновских и магнитозвуковых колебаний. Очевидно, что большие значения  $N_{\parallel}$  должны иметь альфвеновские колебания. Отметим, что при  $p_i < 1$  остается лишь вторая зона прозрачности, соответствующая магнитозвуковым колебаниям.

Альфвеновские колебания, проникшие в глубь плазмы, там и поглощаются, для чего требуется выполнение условия циклотронного резонанса. Внутри плазменного шнура обычно выполняется условие  $q_i \gg 1$ . В этом случае альфвеновские колебания с  $\omega \approx \omega_i$  распространяются лишь под очень малым углом  $\theta$  к магнитному полю и если  $\omega_i > \omega$  (см. рис. 1.8). Таким образом, приходим к выводу, что область проникновения колебаний к центру шнура [ $\omega_i(\mathbf{r}) > \omega$ ] и область поглощения [ $\omega_i(\mathbf{r}) = \omega$ ] будут отделены друг от друга, но через них должны проходить одни и те же силовые линии. Требуемая конфигурация магнитного поля получила название *магнитного берега* [3] (см. также п. 2.2.1). В ее первоначальном варианте предполагалось на некотором участке по длине шнура усилить магнитное поле. Возбуждаемые в этой области альфвеновские колебания, распространяясь под небольшим углом к магнитному полю, проникают внутрь шнура и поглощаются на поверхности, где  $\omega_i(\mathbf{r}) = \omega$ , набега на нее со стороны большего магнитного поля. Искажение магнитного поля, при котором появляется магнитный берег, приводит к ухудшению удержания плазмы. Поэтому такой метод нагрева используют редко. Более привлекательно использование «естественных» градиентов магнитного поля в термоядерных ловушках. Так, в стеллараторах с рейстреком (прямолинейной частью) колебания удобно возбуждать в прямолинейных частях системы, причем их частота должна быть несколько меньше локальной циклотронной частоты. Такие колебания поглощаются в криволинейных участках, где магнитное поле спадает по направлению от оси системы [54].

Довольно большие продольные градиенты магнитного поля — в адиабатических ловушках и ловушках с остроугольной геометрией магнитного поля. Нагрев плазмы с помощью альфвеновских колебаний использовали, например, в японской остроугольной ловушке RFC-XX [55]. Интересные результаты дали эксперименты на американской амбиополярной ловушке ТМХ, в ее крайних частях, где находились высокоэнергетичные ионы с неравновесной функцией распределения, самопроизвольно возбуждались альфвеновские циклотронные колебания. Они распространялись вдоль магнитного поля в среднюю ловушку, где и поглощались более холодными ионами, имевшими равновесное распределение по скоростям. Эффект нагрева был весьма значителен. Поглощение происходило на спаде магнитного поля, т. е. в конфигурации магнитного берега [56].

Магнитозвуковые колебания с  $\omega \approx \omega_i$  распространяются при произвольных значениях угла  $\theta$ . Однако они очень слабо взаимодействуют с ионами, так как при  $\omega = \omega_i$  обладают неблагоприятной — электронной — поляризацией электрического вектора. Выход из положения состоит в нагреве небольшого количества ионов примеси с другой циклотронной частотой  $\omega_i'$  [57, 58]. При малой концентрации примеси поляризация колебаний определяется основной плазмой. Если  $\omega = \omega_i' \neq \omega_i$ , то, как следует из второго уравнения системы (1.24) и выражений (1.26), компонента электрического поля  $E_+$  отлична от нуля, поэтому ионы

примеси весьма интенсивно нагреваются электрическим полем колебаний. Если массы основных ионов и ионов примеси сопоставимы, как, например, в случае водорода, дейтерия и трития, то энергия, полученная ионами примеси, эффективно перекачивается основным ионам при кулоновских соударениях. Следует, однако, отметить, что с ростом концентрации примеси ситуация усложняется, так как сама примесь начинает влиять на волновые свойства плазмы, в том числе и на поляризацию колебаний. Если концентрация примеси превышает некоторое критическое значение, то  $E_+$  обращается в нуль и при  $\omega = \omega_i'$ . Одновременно в интервале частот, лежащем между  $\omega$  и  $\omega_i'$ , появляется так называемый ионный плазменный резонанс [59, 60]. В этом нетрудно убедиться, вспомнив, что частота плазменного резонанса определяется уравнением  $\epsilon_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta / k^2 = 0$ , где индексы  $\alpha, \beta$  принимают значения  $x, y, z$ . В простейшем случае поперечного распространения колебаний ( $\theta = \pi/2$ ), учитывая (1.26), нетрудно получить

$$0 = \epsilon_{xx} = \epsilon_{-} - \epsilon_{+} + -2\epsilon_{-+} = -(1/2)(q_i + q_i') - \omega^2 p_i / \omega(\omega - \omega_i) - \\ - (\omega p_i')^2 / \omega(\omega - \omega_i').$$

Если, например,  $\omega_i > \omega_i'$ , то величина  $\epsilon_{xx}$  проходит через нуль в частотном интервале между  $\omega_i'$  и  $\omega_i$ , так как на его концах она имеет разные знаки ( $\epsilon_{xx} \rightarrow -\infty$  при  $\omega \rightarrow \omega_i'$  и  $\epsilon_{xx} \rightarrow +\infty$  при  $\omega \rightarrow \omega_i$ ). В области плазменного резонанса магнитозвуковые колебания трансформируются в коротковолновые потенциальные колебания, которые затем затухают, например, за счет вязкости. При  $k_{\parallel} \neq 0$  значительная часть энергии передается электронам в процессе бесстолкновительного резонансного поглощения потенциальных колебаний.

В заключение отметим, что в экспериментах на токамаках оба метода циклотронного нагрева плазмы (электронный и ионный) продемонстрировали свою высокую эффективность. При вводимой мощности в сотни киловатт температура возрастает на сотни электрон-вольт. До настоящего времени не обнаружено каких-либо препятствий на пути дальнейшего повышения температуры плазмы, и основная задача состоит в увеличении вводимой мощности.

### 1.3. Магнитотормозное (циклотронное) излучение

**1.3.1. Излучение отдельных частиц.** Собственно циклотронное излучение. Излучение отдельного электрона на  $n$ -й гармонике циклотронной частоты дается формулой [7]

$$dI^{(n)} = \frac{e^2}{c} \left( \frac{n\omega_e}{1 - (v_{\parallel}/c) \cos \theta} \right)^2 \left\{ \left( \frac{\cos \theta - v_{\parallel}/c}{\sin \theta} \right)^2 J_n^2 \left( n \frac{v_{\perp}}{c} \sin \theta \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \cos \theta \right)^{-1} + \left( \frac{v_{\perp}}{c} \right)^2 J_n'^2 \left( n \frac{v_{\perp}}{c} \sin \theta \left( 1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \cos \theta \right)^{-1} \right) \right\} d\Omega. \quad (1.51)$$

При  $v_{\parallel} = 0$  из (1.51) получаем известную формулу Шотта, которая была выведена при расчете в рамках классической теории излучения электрона, движущегося в атоме по круговой орбите [61]. С развитием квантовых представлений стало ясно, что ее излучения электрона, движущегося в атоме по круговой орбите к результатам, полученным Шоттом, возобновился через несколько

десятилетий, когда обнаружилось, что они правильно описывают излучение движущихся в магнитном поле заряженных частиц. Интересно, что и в этом случае область применимости (1.51) ограничивается квантовыми эффектами. Впрочем, соответствующие значения энергии настолько велики ( $\epsilon \geq (m_e c^2)^{3/4} (\hbar \omega_e)^{1/4}$  [62]), что они характерны, скорее, для ускорителей, а не для плазмы.

Формула (1.51) содержит всю информацию об излучении электронов, однако ее не всегда удобно использовать в конкретных расчетах. Более простые выражения получаются в нерелятивистском ( $v/c \ll 1$ ) и ультрарелятивистском ( $1 - v/c \ll 1$ ) пределах. В первом случае излучение принято называть циклотронным, во втором — синхротронным в соответствии с названиями ускорителей нерелятивистских и ультрарелятивистских частиц. [При ускорении ультрарелятивистских частиц приходится синхронно с увеличением энергии изменять индукцию магнитного поля, что отражено в названии ускорителя.] Циклотронное и синхротронное излучения объединяются общим названием магнитотормозное. Иногда вместо него используют термин «циклотронное излучение», в которое тем самым вкладывают более широкий смысл.

В нерелятивистском пределе основная энергия излучается на циклотронной частоте  $\omega_e$  (она может быть сдвинута за счет эффекта Доплера) и излучение по существу является дипольным. Действительно, вращение по ларморовской окружности можно представить в виде суперпозиции колебаний двух взаимно ортогональных диполей, сдвинутых по фазе на  $\pi/2$ . Если, как и выше, использовать систему координат с осью  $OZ$ , параллельной  $\mathbf{B}_0$ , то эквивалентные диполи будут направлены по  $OX$  и  $OY$ , при этом для углового распределения излучения получаем выражение

$$dI^{(1)} = (e^2 \omega_e^2 v_{\perp}^2 / 4c^3) (1 + \cos^2 \theta) c \Omega. \quad (1.52)$$

Разумеется, (1.52) может быть получено из (1.51). Для этого в выражении для  $dI^{(1)}$  следует перейти к пределу  $v/c \ll 1$ .

Мультипольное излучение происходит на гармониках циклотронной частоты и при  $v/c \ll 1$  дает малые поправки к (1.52). Так, квадрупольное излучение имеет частоту  $2\omega_e$ , и его интенсивность в  $(c/v)^2 \gg 1$  раз меньше (1.52).

Синхротронное излучение. В релятивистском случае большое число циклотронных гармоник излучается с одной и той же интенсивностью (по порядку), при этом излучение приобретает качественно новые черты [7. 62—66]: 1) основная энергия излучается на частотах  $\omega \sim \omega_e (\epsilon/m_e c^2)^2 \gg \omega_e$ ; 2) излучение сконцентрировано в диапазоне углов  $|\theta - \chi| \leq m_e c^2 / \epsilon \ll 1$ , где  $\chi = \arctg(v_{\perp} / v_{\parallel})$  — питч-угол электрона. Поскольку вращение по циклотронной окружности равномерное, излучение, усредненное по циклотронному периоду, не зависит от азимутального угла  $\phi$ . Однако в каждый данный момент электрон излучает вдоль мгновенного вектора скорости как прожектор с малым углом раствора луча  $\sim m_e c^2 / \epsilon \ll 1$ ; 3) полная интенсивность излучения по порядку равна  $\sim (e^2 \omega_e^2 / c) (\epsilon / m_e c^2)^2$ ; 4) в достаточно плотной холодной плазме

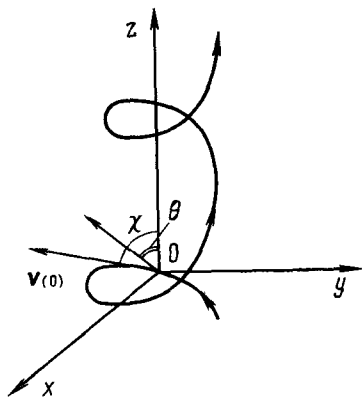


Рис. 1.14. Геометрия движения электрона

излучение ультрарелятивистских электронов резко ослабевает. Для этого плотность холодных электронов должна удовлетворять условию  $\omega_{pe} \gg \omega_e \epsilon / m_e c^2$ , где  $\omega_{pe}$  — ленгмюровская частота холодных электронов.

Три первых свойства можно получить из (1.51). При использовании этой формулы свойства синхротронного излучения получаются как формальное следствие свойств функций Бесселя в пределе больших значений индекса и аргумента. Для выяснения физической природы особенностей синхротронного излучения полезно рассчитать его интенсивность без использования формулы Шотта [65, 66], при этом синхротронное излучение можно рассматривать как черенковское излучение частиц, движущихся ускоренно (центростремительное ускорение, обусловленное действием постоянного магнитного поля) [67].

Вычисления значительно облегчаются тем обстоятельством, что ультрарелятивистская частица излучает в основном вдоль направления своего движения, т. е. волновой вектор излучаемых колебаний отклоняется от вектора скорости частицы лишь на малые углы (см. выше свойство 2). Поэтому колебания с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , лежащим в плоскости  $XOZ$  (рис. 1.14), излучаются, когда вектор скорости электрона, прецессирующий вокруг  $\mathbf{B}_0$ , проходит через эту плоскость. Это обстоятельство позволяет сравнительно просто рассчитать синхротронное излучение с помощью известной формулы, обычно используемой для вычисления тормозного излучения [63]:

$$dI = c (kR/2\pi)^2 |\mathbf{A}_\omega|^2 d\Omega d\omega, \quad (1.53)$$

где

$$\mathbf{A}_\omega = (e/cR) \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{v}(t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{R}(t)); \quad (1.54)$$

$\mathbf{R}$  — вектор расстояния от частицы до точки наблюдения. В (1.54) время отсчитывается от момента прохождения вектора скорости  $\mathbf{v}$  через начало координат. Поскольку значение интеграла (1.54) определяется лишь малой окрестностью момента  $t=0$  (см. ниже), то пределы интегрирования для удобства вычислений взяты бесконечными.

Следует отметить, что циклотронное вращение является периодическим движением, и поэтому излучение должно состоять из набора дискретных линий с частотами, кратными  $\omega_s^r(\epsilon)$ . Выбирая в (1.54) бесконечные пределы интегрирования, мы тем самым переходим к приближению непрерывного спектра. Это приближение

является обычным, поскольку согласно свойству 1 основная доля излучаемой энергии распределена по частотному интервалу  $\Delta\omega \sim \omega_e^r (\varepsilon/m_e c^2)^2$ , значительно превышающему  $\omega_e^r(\varepsilon)$ .

Траектория электрона, изображенная на рис. 1.14, описывается выражениями

$$\mathbf{r}(t) = (\rho_e^r \sin(\omega_e^r t); \rho_e^r (1 - \cos(\omega_e^r t)); v_{\parallel} t),$$

где  $\rho_e^r = v_{\perp} / \omega_e^r \approx (c/\omega_e) (\varepsilon/m_e c^2) \sin \chi$ .

При  $\omega_e^r t \ll 1$  фазу экспоненты, стоящей под интегралом в (1.54), можно представить в виде

$$\Psi(t)_i \approx (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}(0))t + (1/6) k_{\perp} \rho_e^r (\omega_e^r t)^3 \approx \frac{1}{2} \left( \left( \frac{m_e c^2}{\varepsilon} \right)^2 + (\theta_1^2 - \chi)^2 \right) \omega t - \frac{1}{6} \sin^2 \theta \frac{\omega}{\omega_e} (\omega_e t)^3 \left( \frac{m_e c^2}{\varepsilon} \right)^2. \quad (1.55)$$

Здесь в соответствии со сказанным выше считается  $\theta \approx \chi$ , а также используется представление  $v \approx c [1 - (1/2) (m_e c^2/\varepsilon)^2]$ . Несущественная постоянная часть в (1.55) опущена. Скорость  $\mathbf{v}(t)$  при  $t \rightarrow 0$  дается приближенным выражением  $\mathbf{v}(t) \approx c [\sin \chi; \sin \chi (\omega_e^r t); \cos \chi]$ .

После сделанных упрощений интегралы в (1.54) сводятся к известным и выражаются через модифицированные функции Бесселя индексов 1/3 и 2/3 или, что эквивалентно, через функцию Эйри и ее производную. Как известно, по любому направлению могут распространяться колебания с двумя независимыми поляризациями электрического вектора. В данном случае, как и в п. 1.2.5, в качестве базисных удобно выбрать колебания, электрический вектор которых лежит в плоскости  $XOZ$ , и колебания с электрическим вектором, перпендикулярным этой плоскости. Первые соответствуют обыкновенным колебаниям, вторые — необыкновенным. Интенсивность излучения обыкновенных колебаний пропорциональна  $|A_{\omega x}|^2 + |A_{\omega z}|^2$ , необыкновенных —  $|A_{\omega y}|^2$ :

$$dI_{\text{ор}} = \frac{1}{6\pi^3} \frac{e^2 \omega^3}{c \omega_e} \left( \frac{\varepsilon}{m_e c^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \chi} (\theta - \chi)^2 ((\theta - \chi)^2 + \left( \frac{m_e c^2}{\varepsilon} \right)^2) K_{1/3}^2(U) d\omega d\Omega; \quad (1.56)$$

$$dI_{\text{ex}} = \frac{1}{6\pi^3} \frac{e^2 \omega^3}{c \omega_e} \frac{\varepsilon}{m_e c^2} \frac{1}{\sin^2 \chi} \left( (\theta - \chi)^2 + \left( \frac{m_e c^2}{\varepsilon} \right)^2 \right)^2 K_{2/3}^2(U) d\omega d\Omega, \quad (1.57)$$

где  $U = \frac{1}{3} \frac{\omega}{\omega_e} \frac{\varepsilon}{m_e c^2} \frac{1}{\sin \chi} \left[ (\theta - \chi)^2 + \left( \frac{m_e c^2}{\varepsilon} \right)^2 \right]^{3/2}$ .

Поскольку (1.53) дает энергию, излучаемую за один оборот по ларморовской окружности, а нас интересует величина, усредненная по периоду, то в (1.56), (1.57) мы ввели дополнительный множитель  $2\pi/\omega_e^r$ .

Угловая зависимость синхротронного излучения иллюстрируется рис. 1.15 [62, 64—66].

Для определения полного излучения в данном частотном диапазоне  $d\omega$  (1.56), (1.57) следует проинтегрировать по углам (такие вычисления были проведены в [68]):

$$dI_{\text{от}} = (3^{1/2} e^2 \omega_e / 8\pi^2 c) \tilde{U} \left( \int_{\tilde{\theta}}^{\infty} dU K_{5/3}(U) - K_{3/2}(\tilde{U}) \right) d\omega; \quad (1.58)$$

$$dI_{\text{ex}} = (3^{1/2} e^2 \omega_e / 8\pi^2 c) \tilde{U} \left( \int_{\tilde{\theta}}^{\infty} dU K_{5/3}(U) + K_{3/2}(\tilde{U}) \right) d\omega, \quad (1.59)$$

где  $\tilde{U} = (2/3) (\omega / \omega_e \sin \chi) (m_e c^2 / \varepsilon)^2$ .

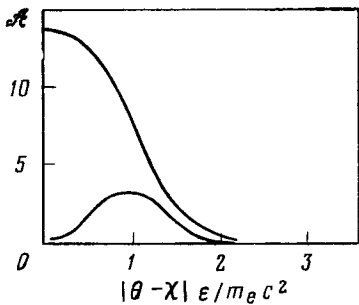


Рис. 1.15. Угловая зависимость синхронного излучения:

1 — обыкновенные колебания; 2 — необыкновенные;

$$\mathcal{A} = 6\pi^3 (c\omega_e / e^2 \omega^2) \sin^2 \chi (\varepsilon / m_e c^2)^3 dI / d\omega d\Omega; \quad \mathcal{A}_{\text{от}} = (\theta - \chi)^2 (\varepsilon / m_e c^2)^2 (1 + (\theta - \chi)^2 (\varepsilon / m_e c^2)^2) K_{1/3}^2(U);$$

$$\mathcal{A}_{\text{ex}} = (1 + (\theta - \chi)^2 (\varepsilon / m_e c^2)^2)^2 K_{2/3}^2(U)$$

Частотная зависимость суммарного излучения определяется функцией  $\mathcal{E}(\tilde{U}) = \tilde{U} \int_{\tilde{\theta}}^{\infty} dU K_{5/3}(U)$  (рис. 1.16) [59, 61—63]. Из

рис. 1.16 следует, что в соответствии со свойством 1 в основном излучаются частоты  $\omega \ll \omega_e \sin \chi (\varepsilon / m_e c^2)^2$ . Учитывая эту оценку, а также рис. 1.15, находим, что излучение сконцентрировано в интервале углов  $|\theta - \chi| \leq m_e c^2 / \varepsilon$  (свойство 2). (Раствор диаграммы направленности мгновенного излучения по азимутальному углу обсуждается ниже.) Свойство 3 следует из (1.58), (1.59) и оценки частотного интервала  $\Delta\omega \sim \omega_e \sin \chi (\varepsilon / m_e c^2)^2$ .

Влияние холодной плазмы (см. свойство 4) приводит к уменьшению показателя преломления  $N^2 \approx 1 - (\omega_{pe} / \omega)^2$  ( $\omega \gg \omega_e$ ). В результате первое слагаемое в выражении для фазы (1.55) принимает вид  $(1/2) [(m_e c^2 / \varepsilon)^2 + (\theta - \chi)^2 + (\omega_{pe} / \omega)^2] \omega_e t$ , где считается  $\omega_{pe} \ll \omega$ . Соответственно изменяются величины в (1.56), (1.57) и в (1.58), (1.59):

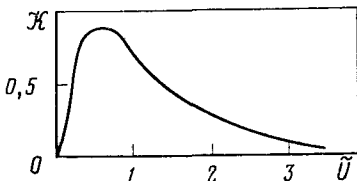
$$U \rightarrow U' = \frac{1}{3} \frac{\omega}{\omega_e} \frac{\varepsilon}{m_e c^2} \frac{1}{\sin \chi} \left[ (\theta - \chi)^2 + \left( \frac{m_e c^2}{\varepsilon} \right)^2 + \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \right]^{3/2};$$

$$\tilde{U} \rightarrow \tilde{U}' = \frac{2}{3} \frac{\omega}{\omega_e} \frac{1}{\sin \chi} \left[ \left( \frac{m_e c^2}{\varepsilon} \right)^2 + \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \right]^{3/2}.$$

Отсюда следует, что при  $\omega_{pe} \gg \omega_e \epsilon / m_e c^2$  излучение резко ослабевает.

Полученные результаты допускают простую интерпретацию. Прежде всего покажем, что синхротронное излучение можно рассматривать как черенковское. Обычно считают, что в вакууме черенковский резонанс невозможен, так как скорость частиц не может сравниться со скоростью света. Однако на самом деле точное равенство скорости частицы и фазовой скорости электромагнитных колебаний требуется, лишь если резонансное взаимодействие длится бесконечное время. При конечном времени взаимодействия  $\Delta t$  в соответствии с соотношением неопределенности  $\Delta\omega\Delta t \approx 1$  частица не «успевает различить» колебания, частоты которых отличаются от резонансной, определяемой условием  $\omega = kv$ , на  $\Delta\omega \sim 1/\Delta t$  и соответственно фазовая скорость отличается на  $k/\Delta t$ . (Длитель-

Рис. 1.16. Частотная зависимость полного синхротронного излучения



ность взаимодействия можно оценить как время, за которое накапливается фазовое рассогласование  $\sim \pi/2$ .) Скорость ультрарелятивистских частиц мало отличается от скорости света — примерно на  $(1/2)c(m_e c^2/\epsilon)^2$ . Еслиpitch-угол электрона  $\chi$  близок к  $\theta$ , то в какой-то момент времени вектор скорости электрона, прецессирующий около  $\mathbf{V}_0$ , окажется параллельным волновому вектору колебаний  $\mathbf{k}$ , при этом некоторое время фаза волны на траектории электрона изменяется очень слабо. Выход из резонанса осуществляется за счет поворота вектора скорости. Этот эффект учитывается последним слагаемым в (1.55). Приравнявая его единице, получаем оценку времени резонансного взаимодействия  $\Delta t \sim \sim \sin^{-2/3} \chi \omega^{-1/3} \omega_e^{-2/3} (\epsilon/m_e c^2)^{2/3}$ . [Чтобы отличие скорости электрона от скорости света не успело сказаться за время взаимодействия, разность  $c-v \approx (c/2)(m_e c^2/\epsilon)^2$  не должна превышать  $c/\omega\Delta t$ , см. [1.55]]. Сопоставляя эти два условия, находим время взаимодействия  $\Delta t \sim (1/\omega_e)(1/\sin \chi) \ll 1/\omega_e$  и характерную частоту излучаемых колебаний  $\omega \sim \omega_e \sin \chi (\epsilon/m_e c^2)^2$ . Формально ограничение на спектр излучаемых частот связано с тем, что при  $\omega \ll \omega_e \sin \chi \times (\epsilon/m_e c^2)^2$  подынтегральное выражение в (1.54) осциллирует с периодом, значительно меньшим  $\Delta t$ . В результате интеграл по времени становится экспоненциально малым.

Развиваемый подход позволяет объяснить и особенности углового распределения синхротронного излучения. Действительно, для частиц, движущихся со скоростью  $v \approx c$ , черенковское излучение концентрируется в узком конусе около направления движения частицы. Угол раствора конуса оценим следующим образом. Из выражения для фазы (1.55) следует, что разность между значениями углов  $\theta$  и  $\chi$  не сказывается на взаимодействии при выполнении

условия  $|\theta - \chi| \leq m_e c^2 / \varepsilon$ . Эта оценка ( $\Delta\theta \sim m_e c^2 / \varepsilon$ ) дает ширину диаграммы направленности излучения в направлении, перпендикулярном плоскости, соприкасающейся с орбитой электрона, т. е. плоскости, проведенной через вектор мгновенной скорости и вектор главной нормали к траектории. Для оценки раствора диаграммы направленности в соприкасающейся плоскости заметим, что за время  $\Delta t \sim 1 / (\omega_e \sin \chi)$  вектор полной скорости электрона  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$  отклоняется на угол порядка  $m_e c^2 / \varepsilon$ . На такой угол волновой вектор излучаемых колебаний может быть повернут относительно вектора мгновенной скорости электрона в соприкасающейся плоскости. Таким образом, по обоим взаимно перпендикулярным направлениям раствор диаграммы направленности оказывается равным примерно  $m_e c^2 / \varepsilon$ .

Зная ширину диаграммы направленности синхротронного излучения, можно оценить его интенсивность. С этой целью используем известную формулу для интенсивности черенковского излучения [65, 69]:

$$dI = (e^2 \omega / c) \sin^2 \theta_c d\omega, \quad (1.60)$$

где  $\theta_c$  — черенковский угол. Принимая  $\theta_c \approx \Delta\theta \approx m_e c^2 / \varepsilon \ll 1$  и считая, что  $dI$  определяется (1.60) при  $\omega \leq \omega_e \sin \chi (\varepsilon / m_e c^2)^2$  и обращается в нуль при  $\omega \gg \omega_e \sin \chi (\varepsilon / m_e c^2)^2$ , для полной интенсивности излучения получаем следующее выражение:

$$I \approx (e^2 \omega_e^2 / c) \sin^2 \chi (\varepsilon / m_e c^2)^2.$$

Нетрудно видеть, что тот же самый результат (по порядку) следует из (1.58), (1.59).

Наконец, обсудим влияние холодной плазмы на синхротронное излучение. Ее добавление приводит к возрастанию фазовой скорости колебаний  $\omega/k \approx c[1 + (1/2)(\omega_{pe}/\omega)^2]$ . Простые оценки показывают, что если  $\omega_{pe} \gg \omega_e \varepsilon / m_e c^2$ , то при характерных значениях частоты  $\omega \sim \omega_e (\varepsilon / m_e c^2)^2$  разность между фазовой скоростью колебаний и скоростью частицы существенно превышает допустимое значение  $c(m_e c^2 / \varepsilon)^2$ . В результате излучение резко падает. Это явление было обнаружено в [70]. В астрофизике оно называется депрессией синхротронного излучения.

Таким образом, рассматривая синхротронное излучение как черенковское, длящееся конечный интервал времени, можно объяснить все его характерные особенности. Другой пример резонансного взаимодействия, обусловленного конечностью времени взаимодействия, рассмотрен в [71] (см. также п. 2.3.1). Оказывается, что благодаря эффекту конечности времени взаимодействия в системах с неоднородным магнитным полем, вообще говоря, может осуществляться резонансный обмен энергией между электромагнитными колебаниями и частицами даже в том случае, когда условие циклотронного резонанса  $\omega = \omega_j(\mathbf{r})$  не выполняется ни в одной точке  $\mathbf{r}$ .



О связи циклотронного резонансного взаимодействия с черенковским. Любой акт излучения или поглощения электромагнитных колебаний можно свести к процессам резонансного взаимодействия между колебаниями и заряженными частицами. Циклотронное резонансное и черенковское взаимодействия считаются существенно различными и даже противопоставляются друг другу, поскольку первое происходит при вращении заряженных частиц по ларморовским окружностям, а второе — при их равномерном движении. Однако, с одной стороны, в реальных условиях строго равномерное движение невозможно, и с другой — любое движение в достаточно малые интервалы времени можно считать почти равномерным. Следовательно, черенковское и циклотронное резонансные взаимодействия при определенных условиях могут стать практически неразличимыми. Нетрудно понять, что разница между ними стирается, если кривизна траектории на расстоянии порядка длины волны колебаний пренебрежимо мала ( $kr_j \rightarrow \infty$ ), а частота колебаний значительно превосходит циклотронную ( $\omega/\omega_j \rightarrow \infty$ ).

Покажем, что при выполнении этих условий с циклотронными колебаниями могут эффективно взаимодействовать лишь ультрарелятивистские частицы. Черты, роднящие циклотронное резонансное взаимодействие ультрарелятивистских частиц с черенковским, были выявлены выше.

Чтобы не загромождать рассмотрение несущественными деталями, проанализируем излучение колебаний с  $k_{||} = 0$  электронами, движущимися поперек магнитного поля ( $v_{||} = 0$ ). Для определенности будем считать, что волновой вектор колебаний направлен по  $Ox$ . Вектор-потенциал колебаний с частотой  $\omega = n\omega_e$  дается выражением [ср. с (1.54)]

$$A_{yn} = \frac{e\omega_e}{2\pi cR} \exp(i kR) \int_0^{2\pi/\omega_e} dt v_y(t) \exp(i n\omega_e t - i kx(t)). \quad (1.61)$$

Используя (1.1) — (1.3), а также соотношение  $\omega = kc$ , приводим выражение для  $A_{yn}$  к виду

$$A_{yn} = (ev/cR) J_n'(nv/c) \exp(i\alpha), \quad (1.62)$$

где  $\alpha$  — несущественный фазовый сдвиг.

Функции Бесселя, появляющиеся при анализе резонансного циклотронного взаимодействия, определяют вес резонансных цилиндрических гармоник в изучаемых колебаниях. При  $\theta = \chi = \pi/2$  излучаются лишь необыкновенные колебания, которые в вакууме имеют плоскую поляризацию. Электрическое поле необыкновенных колебаний можно представить в виде суммы полей с ионной и электронной поляризациями. Этой операции соответствовала бы замена в (1.62)  $2J_n' = J_{n-1} - J_{n+1}$ .

Проанализируем поведение функции Бесселя  $J_n(nv/c)$  с ростом числа  $n$ . В области скоростей, существенно отличных от скорости света, функция Бесселя экспоненциально спадает при  $n \rightarrow \infty$ .

Зависимость от числа  $n$  особенно проста при  $n\nu/c \ll 1$ , когда  $J_n(n\nu/c) \sim (\nu/c)^n = \exp[1 - n \ln(\nu/c)]$ . С ростом  $\nu$  зависимость показателя экспоненты от  $n$  усложняется [39]. Сколько-нибудь существенное — не экспоненциально малое значение функция Бесселя имеет лишь, если  $\nu \rightarrow c$ . В этом случае она выражается через функцию Эйри или, что то же самое, через функцию  $K_{1/3}$  [39]:

$$J_n\left(n \frac{\nu}{c}\right) \underset{\substack{n \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow c}}{\approx} \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\nu}{c}\right)^{1/2} K_{1/3}\left[\frac{2^{3/2}}{3} \tilde{n} \left(1 - \frac{\nu}{c}\right)^{3/2}\right].$$

Соответственно

$$J'_n\left(n \frac{\nu}{c}\right) \underset{\substack{n \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow c}}{\approx} \frac{1}{\pi} \frac{2}{3^{1/2}} \left(1 - \frac{\nu}{c}\right) K_{2/3}\left[\frac{2^{3/2}}{3} n \left(1 - \frac{\nu}{c}\right)^{3/2}\right]. \quad (1.63)$$

Из полученных выражений следует, что при  $n \rightarrow \infty$  с колебаниями эффективно взаимодействуют лишь ультрарелятивистские электроны, для которых  $1 - \nu/c \leq n^{-2/3}$ .

Отметим, что представление (1.63) может быть получено непосредственно из (1.61), если учесть, что в интересующем нас случае интеграл по  $dt$  в (1.62) определяется небольшим участком траектории, на котором вектор скорости электрона примерно параллелен волновому вектору колебаний. Именно это упрощающее предположение использовалось при анализе синхротронного излучения в данном разделе.

**1.3.2. Излучение высокотемпературной плазмы.** Полная интенсивность  $I$  излучения отдельного электрона, движущегося в магнитном поле, дается выражением [63]

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^4 B_0 v^2}{m_e^2 c^5 (1 - v^2/c^2)}.$$

Этот результат может быть получен с помощью (1.51) [63]. Если бы все электроны теряли свою энергию в соответствии с этой формулой, то потери на излучение сделали бы невозможным практическое использование даже наиболее доступной D—T-реакции. Например, в магнитном поле 3 Тл отдельный электрон «высвечивает» свою энергию за время порядка 1 с.

Однако, как показано в [18, 72—75], излучение плазмы, содержащей  $N$  электронов, может оказаться значительно меньше  $NI$ . Оно уменьшается за счет так называемого эффекта самопоглощения циклотронного излучения. Действительно, в соответствии с соотношением Эйнштейна поглощательная способность плазмы пропорциональна ее излучательной способности. Поэтому часть энергии, излучаемой электронами плазмы, поглощается внутри нее.

Для расчета излучения плазмы с учетом эффекта самопоглощения воспользуемся законом Кирхгофа

$$dI_{\text{пл}}/d\omega d\Omega = \eta(\omega, \Omega) dI_{RJ}/d\omega d\Omega,$$

где  $dI_{\text{пл}}/d\omega d\Omega$  — плотность потока излучения с единицы поверхности плазмы в единичном телесном угле и единичном частотном интервале;  $dI_{RJ}/d\omega d\Omega = \omega^2 T / (8\pi^3 c^2)$  — равновесная рэлей-джинсов-

ская плотность потока излучения;  $\eta(\omega, \theta)$  — коэффициент поглощения плазмы. В случае однородного плазменного слоя толщиной  $L_{\text{пл}}$  коэффициент поглощения связан с коэффициентом пространственного затухания соотношением  $\eta = 1 - \exp(-2\kappa L_{\text{пл}})$ . Если выполняется условие  $\kappa L_{\text{пл}} \gg 1$ , то излучение, падающее на плазму, поглощается в тонком поверхностном слое толщиной  $\sim \kappa^{-1} \ll L_{\text{пл}}$ . При этом очевидно, что только этот слой и может свободно высвечиваться. В результате при  $\kappa L_{\text{пл}} \gg 1$  объемное излучение заменяется значительно менее интенсивным — поверхностным.

Если в области частот, где выполняется условие  $\kappa \sim L_{\text{пл}}$ , коэффициент пространственного затухания достаточно резко меняется с частотой, то при приближенных оценках излучения плазмы можно положить

$$\frac{dI_{\text{пл}}}{d\omega d\Omega} = \begin{cases} dI_{\text{RJ}}/d\omega d\Omega & (2\kappa L_{\text{пл}} > 1); \\ 0 & (2\kappa L_{\text{пл}} < 1). \end{cases}$$

При таком подходе задача расчета излучения сводится к нахождению максимальной высвечиваемой частоты  $\omega^*$ , определяемой равенством  $2\kappa(\omega^*)L_{\text{пл}} = 1$  [7, 73]. Соответственно для потока энергии, уносимого с единицы поверхности плазмы колебаниями с определенной поляризацией,  $I_{\text{пл}} = \omega^{*3} T / 12\pi^2 c^2$ .

Ниже показано, что основной вклад в излучение дают необыкновенные колебания, а поток энергии в обыкновенных колебаниях пренебрежимо мал.

В области частот  $\omega \gg \omega_e$  максимум энергии излучается под прямым углом к магнитному полю. По коэффициенту пространственного затухания именно таких колебаний и следует определять максимальную высвечиваемую частоту [7, 73].

Теперь проанализируем, сначала качественно, ход зависимости  $\kappa(\omega)$ . В нерелятивистской плазме ( $T \ll m_e c^2$ ) коэффициент пространственного затухания имеет резкие максимумы в окрестности первых циклотронных гармоник (см. § 1.2). Линии циклотронного поглощения уширяются за счет эффекта Доплера и релятивистской зависимости циклотронной частоты от энергии. Если  $L_{\text{пл}} \gg 1$  м, а  $T \geq 25$  кэВ (только при такой температуре потери на излучение могут оказаться существенными в энергобалансе плазмы), то даже небольшой доли релятивистских электронов из максвелловского распределения по энергиям достаточно для эффективного перекрытия первых циклотронных гармоник. В результате во всей этой области частот выполняется условие  $\kappa L_{\text{пл}} \gg 1$ . С переходом на более высокие частоты ( $\omega \gg \omega_e$ ) излучаемая энергия концентрируется к углу  $\theta = \pi/2$ . Для таких колебаний форма линии циклотронного поглощения дается выражением

$$\kappa(\omega) \sim (-\Delta\omega/\omega)^2 \exp(M_e \Delta\omega/\omega), \quad (1.64)$$

где  $\Delta\omega = \omega - n\omega_e \approx -n\omega_e v^2/2c^2$ ;  $M_e = m_e c^2/T$ .

В (1.64) экспоненциальный фактор дает долю резонансных электронов в максвелловском распределении по энергиям, а предэкспонента учитывает то обстоятельство, что интенсивность резо-

нансного взаимодействия пропорциональна фактору  $J_n^2(k\rho_e) \propto \rho_e^{2n}$ . Из (1.64) находим, что поглощение максимально при  $k\rho_e \ll 1$ ,  $(\Delta\omega)_0 = -\omega_e n / M_e$ , а полуширина линии поглощения, определяемая по формуле  $(\Delta\omega)_{1/2} = |\kappa/\kappa''|_{\omega=\omega_0}^{1/2}$ , где  $\omega_0 = (\Delta\omega)_0 + n\omega_e$ , равна  $(\Delta\omega)_{1/2} \approx \omega_e n^{3/2} / M_e$ . Если выполняется условие  $n \geq M_e^{2/3}$ , то линии поглощения сливаются, и ярко выраженные максимумы в спектре поглощения пропадают. С увеличением частоты возрастает энергия электронов, дающих основной вклад в поглощение  $\varepsilon \approx n m_e c^2 / M_e$ , и уже при  $n \sim M_e$  получаем  $\varepsilon \sim m_e c^2$ . Последняя оценка показывает, что в области высоких частот для получения точных результатов необходимо в полной мере учитывать релятивистские эффекты, а также отказаться от разложения в ряд функций Бесселя  $J_n(\xi_e)$ . Этот вывод вполне согласуется с результатами п. 1.3.1.

Одновременный учет большого числа циклотронных гармоник — трудоемкая расчетная задача [72—74]. Имея в виду получение приближенных оценок, предположим, что максимальная высвечиваемая частота столь высока, что поглощение (излучение) колебаний с  $\omega \sim \omega^*$  определяется не просто релятивистскими, а ультрарелятивистскими электронами. Ниже показано, что такой подход дает неплохую точность и в области частот, где энергия резонансных частиц порядка  $m_e c^2$ .

Для расчета коэффициента пространственного затухания воспользуемся соотношением Эйнштейна, связывающим этот коэффициент (поглощательную способность плазмы) с ее излучательной способностью [см. (1.56), (1.57)].

В классическом пределе ( $\hbar\omega \ll T$ ) соотношение Эйнштейна можно представить в виде [7, 68]

$$\kappa(\omega) = -\frac{4\pi^3 c^2}{\omega^2} \int \frac{dI}{d\omega d\Omega} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\mathbf{P}. \quad (1.65)$$

Функции  $K_\nu$ , входящие в выражения (1.56), (1.57) для излучательной способности, заменим их асимптотическим представлением:  $K_\nu(U) \approx (\pi/2U)^{1/2} \exp(-U)$ , а также предположим, что основной вклад в интеграл дают питч-углы, удовлетворяющие условию  $|\theta - \chi| \ll m_e c^2 / \varepsilon$ . (Это предположение подтверждается при вычислении.) После этого, считая распределение электронов по скоростям максвелловским, вычислим интегралы по питч-углу  $\chi$  и энергии методом перевала. Положение точки перевала дается выражением  $\varepsilon^* \approx [(4/3)(\omega/\omega_e)T(m_e c^2)^2]^{1/3}$ . Поэтому интеграл по энергии действительно определяется ультрарелятивистской частью функции распределения при условии  $n = \omega/\omega_e \gg m_e c^2 / T$ . Выполняя в (1.65) асимптотическое интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{ор}}(\omega, \theta) \approx & \frac{\pi^{1/2}}{2^{2/3} 3^{5/3}} \frac{\omega_{pe}^2}{c\omega} \left( \frac{\omega_e}{\omega} \sin \theta \right)^{1/3} \times \\ & \times \left( \frac{m_e c^2}{T} \right)^{5/6} \exp \left[ -\frac{3^{2/3}}{2^{1/3}} \left( \frac{\omega}{\omega_e \sin \theta} \right)^{1/3} \left( \frac{m_e c^2}{T} \right)^{2/3} + \frac{m_e c^2}{T} \right]; \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\kappa_{\text{ex}}(\omega, \theta) \approx \frac{\pi^{1/2}}{6} \frac{\omega_{pe}^2}{c\omega} \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{3^{2/3}}{2^{1/3}} \left(\frac{\omega}{\omega_e \sin \theta}\right)^{1/3} \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^{2/3} + \frac{m_e c^2}{T} \right]. \quad (1.67)$$

Показатель экспоненты в (1.66), (1.67) имеет вид разложения по параметру  $[(\omega_e/\omega)(m_e c^2/T)]^{1/3} \ll 1$ . Точность, даваемая выражениями (1.66), (1.67), в некоторых случаях оказывается недостаточной. Для того чтобы получить следующие члены разложения в показателе экспоненты, необходимо в (1.65) удержать слагаемые пятого порядка по  $\omega_e r t \ll 1$ , а для скорости использовать выражение  $v \approx c[1 - (1/2)(m_e c^2/\varepsilon)^2 + (1/8)(m_e c^2/\varepsilon)^4]$ . Интегрирование по времени модифицированного выражения (1.64) приводит к выражениям (1.66), (1.67), в которых функции Бесселя заменены их асимптотиками, причем показатель экспоненты оказывается равным:

$$-\frac{\omega}{3\omega_e} \left(\frac{m_e c^2}{\varepsilon}\right)^2 \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{m_e c^2}{\varepsilon}\right)^2\right] - \frac{\omega}{2\omega_e} (\theta - \chi)^2.$$

Дальнейшие вычисления дают

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{ex}}\left(\omega, \frac{\pi}{2}\right) &\approx \frac{\pi^{1/2}}{6} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{3^{2/3}}{2^{1/3}} \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^{1/3} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^{2/3} + \frac{m_e c^2}{T} - \frac{3^{4/3}}{5 \cdot 2^{1/3}} \left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)^{1/3} \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^{4/3} \right]. \quad (1.68) \end{aligned}$$

Мы привели наибольшую из величин  $\kappa_{\text{ex}}$ ,  $\kappa_{\text{ог}}$ , поскольку именно по ней следует определять максимальную высвечиваемую частоту. В равенство

$$2\kappa_{\text{ex}}(\omega^*, \pi/2)L_{\text{пл}} = 1 \quad (1.69)$$

входят три безразмерных параметра: номер гармоники  $n = \omega/\omega_e$ ,  $M_e = m_e c^2/T$  и  $\Lambda = \omega_{pe}^2 L_{\text{пл}}/\omega_e c$ . Последнюю величину, как и в [7, 74], представим в виде  $\Lambda = (3/2) \cdot 10^3 \beta^{(p)} B$  (Тл)  $L_{\text{пл}}$ (см)  $T^{-1}$  (кэВ), где  $\beta^{(p)} = 8\pi l_0 T/B^2$ . Результаты решения (1.69) представлены на рис. 1.17, на том же рисунке приведены значения  $n^*(\beta^{(p)} B L_{\text{пл}})$ , полученные для плоского слоя плазмы в [74]; см. также [18]. Как видно из рисунка, значения максимальной высвечиваемой частоты, получаемые двумя способами, по порядку оказываются одинаковыми; совпадает и общий ход зависимости  $n^*(\beta^{(p)} B L_{\text{пл}})$ . Это показывает, что предположение об определяющей роли высокоэнергетических электронов ( $\varepsilon \gg m_e c^2$ ) в излучении высокотемпературной плазмы верно.

В приведенном расчете не учитывалось влияние низкоэнергетической части функции распределения электронов на излучение. Наличие холодных электронов приводит к увеличению фазовой

скорости ( $N^2 \approx 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ ), что ослабляет резонансное взаимодействие высокоэнергетических электронов с колебаниями (см. п. 1.3.1). Если плотность плазмы удовлетворяет условию  $q_e \ll \ll n^{4/3} M_e^{2/3}$ , то слагаемое  $\omega_{pe}^2/\omega^2$  в выражениях для  $U'$ ,  $U''$  (1.68), (1.69) может быть учтено как малая поправка. Дальнейшие вычисления приводят к (1.66) — (1.68), причем в показателе экспоненты появляется дополнительное малое слагаемое:  $-\omega_{pe}^2/\omega_e = -q_e/n$ . Результаты расчета с модифицированным выражением для  $\kappa_{ex}$  представлены на рис. 1.18. Как и следовало ожидать,

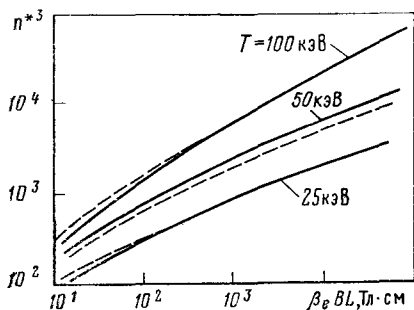


Рис. 1.17. Зависимость номера максимальной высвечиваемой гармоники  $n^*$  от параметров плазмы;

— — расчет по формуле (1.69);  
 - - - результаты, полученные в [74] (см. также [18])

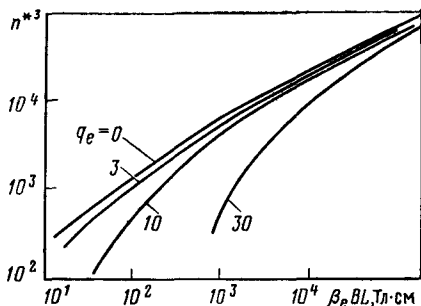


Рис. 1.18. Зависимость номера максимальной высвечиваемой гармоники от параметров плазмы при  $T = 100$  кэВ и различных значениях  $q_e = \omega_{pe}^2/\omega_e^2$

влияние холодной плазмы особенно велико в области низких частот. Здесь при  $q_e \geq 10$  учет холодной плазмы снижает потери на излучение ( $I_{пл} \sim \omega^{*3}$ ) на порядок. Зависимости, аналогичные приведенной на рис. 1.18, имеют место и при меньшей температуре плазмы. Величину  $q_e$  можно представить в виде  $q_e = \beta^{(p)} m_e c^2 / 2T$ . Из этого представления следует, что при  $T \geq 25$  кэВ условие  $q_e \geq 10$  может быть выполнено лишь при достаточно высоком давлении плазмы  $\beta_e^{(p)} \geq 1$ .

В ряде систем (бампираторы, модифицированные амбиполярные ловушки и др.) электронная компонента плазмы состоит из двух частей — основной с  $T_e \ll m_e c^2$  и высокоэнергетической  $\epsilon \geq m_e c^2$ . В этом случае для существенного снижения синхротронного излучения ленгмюровская частота холодных электронов должна удовлетворять условию  $\omega_{pe} \geq \omega_e \epsilon / m_e c^2$  (см. выше). Например, в эксперименте [76] значение  $q_e$  для этого должно быть увеличено примерно в 10 раз.

В заключение обсудим вопрос, как отражение от стенок камеры, в которой находится плазма, влияет на излучательные потери. В интересующем нас частотном интервале  $\omega \geq 10\omega_e$  ( $\omega/2\pi \geq 10^3$  ГГц при  $B_0 \geq 3T$ ) коэффициент поглощения электромагнитных волн металлическими поверхностями мал:  $\eta_{ст} \leq 10^{-1}$  [75]. (Отметим, что эффективный коэффициент поглощения  $\eta_{ст}$  должен

также учитывать уход излучения из системы через отверстия в камере.)

В случае малых значений  $\eta(\omega)$ ,  $\eta_{\text{ст}} \ll 1$  излучение, прежде чем поглотиться, много раз пройдет по системе. Установившееся равновесное значение спектральной плотности потока излучения можно найти из очевидного уравнения баланса:

$$\frac{dI_{RJ}}{d\omega d\Omega} \eta(\omega) = \frac{dI}{d\omega d\Omega} (\eta(\omega) + \eta_{\text{ст}}).$$

Здесь считается, что в результате многократных проходов по системе излучение изотропизируется.

В приближенных оценках, как и выше, можно принять ступенчатую аппроксимацию для плотности потока излучения:

$$\frac{dI}{d\omega d\Omega} = \begin{cases} dI_{RJ}/d\omega d\Omega, & \omega < \omega^{**}; \\ 0, & \omega > \omega^{**}, \end{cases} \quad (1.70)$$

где перенормированное значение максимальной высвечиваемой частоты  $\omega^{**}$  определяется из условия  $\eta(\omega) = \eta_{\text{ст}}$ . Аппроксимация (1.70) по существу соответствует предположению, что в области частот, где  $\eta(\omega) > \eta_{\text{ст}}$ , излучение находится в тепловом равновесии с плазмой, а в области частот, где  $\eta(\omega) < \eta_{\text{ст}}$ , — со стенкой, температура которой считается пренебрежимо малой.

В соответствии с (1.70) для мощности потерь с единицы площади поверхности плазмы получаем следующее выражение:

$$I \approx \eta_{\text{ст}} \omega^{**3} T / 12\pi^3 c^2.$$

Таким образом, наличие частично отражающих стенок приводит к двум эффектам. Во-первых, возрастает максимальная высвечиваемая частота, и, во-вторых, в  $\eta_{\text{ст}}^{-1}$  раз уменьшается мощность, теряемая плазмой в частотном интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ .

**1.3.3. Излучение «низкотемпературной» плазмы (измерение электронной температуры).** Если температура плазмы не превышает нескольких килоэлектрон-вольт (такую плазму будем условно называть низкотемпературной), то потери на циклотронное излучение в ее энергобалансе не играют сколько-нибудь значительной роли, а само излучение представляет интерес, главным образом, для диагностики электронной температуры. В низкотемпературной плазме спектр излучения дискретный, состоящий из отдельных циклотронных гармоник. Переход от сплошного спектра к дискретному с уменьшением температуры иллюстрируется рис. 1.19 [73]. Из этого рисунка хорошо видно, что в области низких частот, где коэффициент поглощения плазменного слоя близок к 1, излучение практически совпадает с равновесным — рэлей-джинсовским. При  $T_e \geq 25$  кэВ циклотронные частоты перекрываются за счет релятивизма и эффекта Доплера, и спектр излучения является сплошным. Температура 10 кэВ не обеспечивает перекрытия, в результате излучение концентрируется вблизи циклотронных частот.

Если температура плазмы не превышает нескольких килоэлектрон-вольт, то в реальных системах уширение линии циклотронного излучения в основном обуславливается неоднородностью магнитного поля. (Этот эффект отмечен в [77].)

В этом случае спектральное распределение излучения позволяет судить о пространственном распределении температуры. (Разумеется, при этом изменение циклотроинной частоты в области, занятой плазмой, не должно превышать  $\omega_e$ .)

Такие измерения наиболее информативны, если коэффициент поглощения колебаний, падающих на приемник излучения, близок к 1. В этом случае спектральная плотность потока излучения принимает рэлей-джинсовское значение, причем каждому значению частоты соответствует своя температура  $T(r)$ , где  $r$  — точка пересечения траектории принимаемого луча с поверхностью  $\omega = n\omega_e(r)$ . Если  $\eta(\omega) < 1$ , но  $\eta(\omega) > \eta_{cr}$ , то плотность потока излучения также близка к рэлей-джинсовской. Отметим, что если  $\eta_{cr} \ll 1$  и излучение, прежде чем погло-

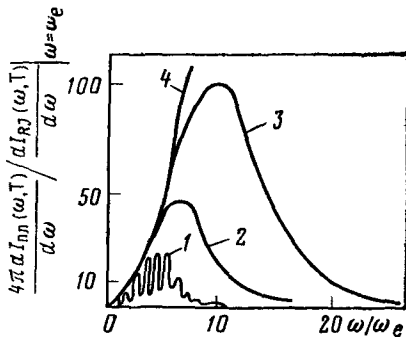


Рис. 1.19. Спектральное распределение интенсивности излучения слоя плазмы ( $\Lambda = L_{\text{пл}} \omega_p e^2 / c \omega_e = 10^4$ ) при различных значениях температуры:

1 —  $T = 10$  кэВ; 2 —  $T = 25$  кэВ; 3 —  $T = 50$  кэВ; 4 — нормированное рэлей-джинсовское распределение

титься стенкой, успевает изотропизоваться при многократных прохождениях по системе, то температура, определяемая таким образом, будет некоторой средней по резонансной поверхности  $\omega = n\omega_e(r)$ .

Из сказанного следует, что при использовании описанной диагностики необходимо отдать предпочтение колебаниям с наибольшим коэффициентом поглощения.

Обычно температура плазмы выравнивается вдоль силовых линий магнитного поля. Поэтому, чтобы получить информацию об ее пространственном распределении, необходимо принимать лучи, пересекающие возможно большее число силовых линий. Как в случае открытых магнитных ловушек, так и в случае систем с замкнутыми силовыми линиями последнему требованию можно удовлетворить, если регистрировать лучи, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю, т. е. поместить приемник в положение 1 и 2 на рис. 1.10 и в положение 2 на рис. 1.11. При  $\theta = \pi/2$  коэффициент поглощения максимален для обыкновенных колебаний на первой циклотроинной гармонике и необыкновенных на второй (см. § 1.2, а также § 2.2, где рассчитывается коэффициент поглощения в неоднородном магнитном поле).

Выше мы нашли, что излучение электронов резко возрастает с увеличением их энергии. Поэтому наличие в плазме даже небольшой группы электронов с энергией  $\epsilon \gg T$  может существенно исказить характер циклотроинного излучения. При определенных условиях (немонотонность функции распределения электронов по скоростям, ее анизотропия и т. п.) такие электроны могут «раскачивать» коллективные степени свободы плазмы. В этом случае излучение становится коллективным — когерентным и может на много порядков превышать рассчитанное выше некогерентное излучение. В токамаках с не слишком высокой плотностью плазмы ( $n_0 \leq 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ) указанные эффекты могут вызываться небольшой груп-



пой так называемых убегающих электронов, энергия которых доходит до нескольких мегаэлектрон-вольт [78]. Успешные измерения температуры электронов и ее пространственного распределения по циклотронному излучению в замкнутых системах (токамаках и стеллараторах) проведены в работах [79—83]. В открытых ловушках использованию этого метода пока что мешают малые значения коэффициента поглощения, обусловленные низкой температурой электронов и малыми размерами плазмы.

Отметим, что задолго до использования в термоядерных исследованиях метод определения температуры электронов по циклотронному излучению применялся в холодной слабоионизованной плазме с  $T_e \lesssim 10$  эВ [84]. В этом случае спектр излучения состоит из очень резких линий с  $\omega \approx n\omega_e$ . Лишь в их максимумах коэффициент поглощения плазмы достигает значений, близких к 1, и соответственно интенсивность излучения близка к равновесной — рэлей-джинсовской.

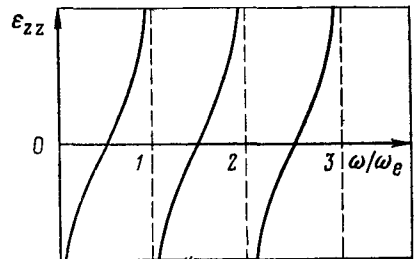
#### 1.4. Собственно циклотронные колебания

**1.4.1. Общие свойства.** Ввиду того что в магнитном поле все частицы с одинаковым отношением  $e_j/m_j$  вращаются с одной и той же частотой  $\omega_j$ , отклик плазмы на электромагнитные возмущения с  $\omega \approx \omega_j$  оказывается очень большим — резонансным. Благодаря эффектам конечного ларморовского радиуса появляются резонансы также и на гармониках циклотронной частоты ( $\omega = n\omega_j$ ,  $n \geq 2$ ). В окрестности резонансных частот ( $\omega \approx n\omega_j$ ,  $n \geq 1$ ) диэлектрическая проницаемость плазмы, характеризующая ее от-

Рис. 1.20. Зависимость одной из компонент тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{zz}$  от частоты при  $k_{\parallel} = 0$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n(\xi_{Te}^2)}{\omega - n\omega_e}$$

от частоты при  $k_{\parallel} = 0$



клик на возмущение электрического поля, пробегает практически весь интервал значений от  $-\infty$  до  $+\infty$  (см. рис. 1.20, на котором для иллюстрации изображена компонента диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{zz} = 2\epsilon_{\parallel\parallel}$  в области частот  $\omega \sim n\omega_e$  при  $k_{\parallel} = 0$ ).

Поэтому почти любое условие, налагаемое на  $\epsilon_{\alpha\beta}$  дисперсионным уравнением, может быть удовлетворено и, следовательно, в широком интервале изменения значений волнового вектора должны существовать решения этого уравнения с частотами, близкими к  $n\omega_j$ . Соответствующие им ветви колебаний можно назвать собственно циклотронными. Иногда эти колебания называют просто циклотронными, однако их необходимо отличать от других ветвей колебаний (обыкновенных и необыкновенных, альфвеновских и магнитозвуковых), которые также могут существовать в области частот  $\omega \approx n\omega_j$ .

В реальных условиях всегда действуют факторы, приводящие к расстройке циклотронного резонанса. Наиболее существенные из них — неоднородность магнитного поля, эффект Доплера, вызванный тепловым движением частиц вдоль магнитного поля, и, в случае электронного циклотронного резонанса, релятивистская зависимость циклотронной частоты от энергии электронов. Расстройка резонанса сопровождается двумя эффектами. Во-первых, ограничивается значение диэлектрического отклика плазмы, в результате чего сокращается интервал изменения длин волн собственно циклотронных колебаний. Во-вторых, появляются частицы, попадающие в точный резонанс с волной. Взаимодействие с ними приводит к затуханию колебаний.

Чтобы устранить влияние этих эффектов, частота собственно циклотронных колебаний должна отстоять от  $n\omega_j$  достаточно далеко:  $|\omega - n\omega_j| \gg \text{Max} [n\Delta\omega_j, k_{\parallel} v_{Tj}, n\omega_j (v_{Tj}/c)^2]$ , где  $\Delta\omega_j$  — изменение циклотронной частоты в пределах системы. Второе из этих условий можно представить в виде  $k_{\parallel} \ll |\omega - n\omega_j|/v_{Tj}$ . Но для того чтобы проявились резонансы на циклотронных гармониках, обязанные действию эффектов конечного ларморовского радиуса, поперечная компонента волнового вектора должна быть достаточно велика:  $k_{\perp} \geq \rho_j$ . Сопоставляя эти два условия, приходим к заключению, что собственно циклотронные колебания должны распространяться почти под прямым углом к магнитному полю:  $k_{\parallel}/k_{\perp} \ll |\omega - n\omega_j|/\omega_j$ .

Эффекты конечного ларморовского радиуса играют определяющую роль в появлении собственно циклотронных колебаний. Действительно, в холодной плазме дисперсионное уравнение алгебраическое — квадратичное относительно  $N^2$ . Его решения соответствуют обыкновенным и необыкновенным колебаниям в области частот  $\omega \sim n\omega_e$  и альфеновским и магнитозвуковым в области  $\omega \sim n\omega_i$ . При учете эффектов, вызываемых тепловым движением частиц (эффекты Доплера, конечности ларморовского радиуса), оно становится сложным — трансцендентным с большим числом корней. Физические соображения, изложенные выше, позволяют его упростить, ограничившись областью углов  $\theta \approx \pi/2$ . В этом случае из эффектов, связанных с тепловым движением частиц, остаются существенными лишь эффекты конечности ларморовского радиуса. Следует отметить, что даже это упрощенное дисперсионное уравнение до сих пор не изучено с исчерпывающей полнотой. Тем не менее основные ветви колебаний, которые могут проявляться в реальных условиях, по-видимому, уже исследованы.

Собственно циклотронные колебания представляют собой, сугубо плазменное явление. Отражается это, в частности, в том, что они могут распространяться, лишь если плотность плазмы превышает некоторое критическое значение. Это обстоятельство затрудняет накачку циклотронных колебаний и их вывод из плазмы, а следовательно, и практическое использование собственно циклотронных колебаний, например, для нагрева плазмы или ее диагностики.

Но поскольку циклотронные колебания обусловлены эффектами теплового движения заряженных частиц, они «чутко реагируют» на изменение вида функции распределения заряженных частиц по скорости. Так, возникновение неравновесности может легко привести к их раскачке.

Довольно подробный анализ собственно циклотронных колебаний можно найти в монографиях [8, 24], авторы которых сами внесли немалый вклад в их изучение. Мы не будем повторять этот анализ. В качестве характерного примера рассмотрим лишь необыкновенные электронные колебания, которые понадобятся для дальнейшего рассмотрения (см. п. 2.2.4).

**1.4.2. Необыкновенные электронные колебания.** Для колебаний, распространяющихся поперек магнитного поля, величины  $\epsilon_{-||}$ ,  $\epsilon_{+||}$  обращаются в нуль и дисперсионное уравнение распадается на два:

$$\left. \begin{aligned} N^2 &= 2\epsilon_{||} = \epsilon_{zz}; \\ N^2 &= 2 \frac{\epsilon_{--}\epsilon_{++} - \epsilon_{-+}^2}{\epsilon_{--} + \epsilon_{++} + 2\epsilon_{-+}} = \frac{\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

Первое из них описывает колебания, которые ввиду их поляризации ( $E_{-} = E_{+} = 0$ ,  $E_{||} \neq 0$ ) могут быть названы обыкновенными, второе — необыкновенными колебаниями ( $E_{||} = 0$ ,  $E_{-} \neq 0$ ,  $E_{+} \neq 0$ ). Анализируя дисперсионное уравнение необыкновенных колебаний, рассмотрим два предельных случая — малых ( $k \ll \rho_{Te}^{-1}$ ) и больших ( $k \gg \rho_{Te}^{-1}$ ) значений волнового вектора. При  $\xi_{Te} \ll 1$  в  $\epsilon_{\alpha\nu}$  наряду с резонансными необходимо учесть слагаемые с номерами  $n=1$  (в  $\epsilon_{--}$ ) и  $n=-1$  (в  $\epsilon_{++}$ ) (см. (1.25)). «Резонансную» — пропорциональную  $(\omega - n\omega_e)^{-2}$  часть сочетания  $\epsilon_{-+}^2 - \epsilon_{-}\epsilon_{+}$  можно представить в виде  $(\epsilon_{-+}^2 - \epsilon_{-}\epsilon_{+})_{\text{res}} = q_e^2 (A_{n-1} \times \times A_{n+1} - A_n^2) \Delta_{ne}^{-2}$ , где  $\Delta_{ne} = (\omega - n\omega_e) / \omega_e$ . Уравнение необыкновенных колебаний квадратично относительно  $\Delta_{ne}$ . Разлагая  $A_n(\xi_{Te}^2) = I_n(\xi_{Te}^2) \exp(-\xi_{Te}^2)$  в ряд по  $\xi_{Te}^2$ , находим, что два решения (1.71) имеют разный порядок:

$$\begin{aligned} \Delta_{ne}^{(1)} &\approx q_e \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \times \\ &\times \frac{N^2/2 + q_e/n(n+1)}{N^2 [1 - q_e/(n+1)] - q_e/n^2(n^2-1)}; \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\Delta_{ne}^{(2)} \approx -q_e \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)!} \frac{1}{N^2/2 + q_e/n(n+1)}. \quad (1.73)$$

Эти выражения справедливы при  $n \geq 2$ , если  $n=1$ , то остается лишь второе решение (1.73).

В обратном предельном случае  $\xi_{Te} \gg n$ , используя асимптотическое представление для  $I_n(\xi_{Te}^2)$ , из (1.71) находим

$$\begin{aligned} \Delta_{ne}^{(1,2)} &\approx \frac{1}{2(1 + q_e/\xi_{Te}^2)} \left\{ \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \frac{q_e}{\xi_{Te}^3} \pm \left[ \left( \frac{n^2}{2\pi} \left( \frac{q_e}{\xi_{Te}^3} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \left( 1 + \frac{q_e}{\xi_{Te}^2} \right) \frac{4q_e^2}{\pi N^2 \xi_{Te}^4} \right)^{1/2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Полученные выражения для  $\Delta_{ne}$  позволяют составить общее представление о зависимости частоты циклотронных колебаний от волнового вектора. В предельном случае больших показателей преломления ( $N^2 \gg q_e$ ) конечным остается лишь первое решение —  $\Delta_{ne}^{(1)}$ , которое описывает потенциальные колебания. При  $k \sim \rho_{Te}^{-1}$  условие потенциальности ( $N^2 \gg q_e$ ) можно представить в виде  $\beta_e^{(p)} = 8\pi n_0 T_e / B_0^2 \ll 1$ . Потенциальные колебания удовлетворяют дисперсионному уравнению  $\epsilon_{\text{внх}} = 0$ .

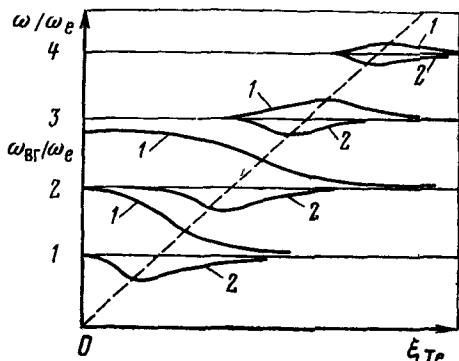


Рис. 1.21. Зависимость частот необыкновенных электронных циклотронных колебаний от волнового вектора при  $2 < \omega_{вг}/\omega_e < 3$ . 1 — потенциальные колебания (моды Бернштейна); 2 — непотенциальные колебания; — — —  $\xi_{Te} = n$

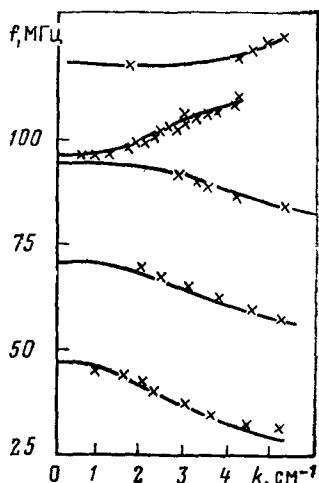


Рис. 1.22. Зависимость частот потенциальных электронных циклотронных колебаний от волнового вектора [85]  $f_e = \omega_e/2\pi = 23,7$  МГц;  $f_{pe} = \omega_{pe}/2\pi = 93,7$  МГц;  $B_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  Тл;  $n_0 = 10^8$  см $^{-3}$ ;  $T_e = 1,2$  эВ.

Из (1.72) следует, что при  $N_e^2 \gg q_e$  и  $\xi_{Te} \ll 1$  знак  $\Delta_{ne}^{(1)}$  зависит от соотношения между частотой колебаний  $\omega \approx n\omega_e$  и верхней гибридной частотой  $\omega_{вг} = (\omega_e^2 + \omega_{pe}^2)^{1/2}$ . Если  $n\omega_e > \omega_{вг}$ , то  $\Delta_{ne}^{(1)} > 0$ , а если  $n\omega_e < \omega_{вг}$ , то  $\Delta_{ne}^{(1)} < 0$ . В то же время при  $\xi_{Te} \gg n$  величина  $\Delta_{ne}^{(1)}$  всегда положительна. На рис. 1.21 зависимость частоты потенциальных колебаний от волнового вектора изображена кривыми 1. Обратим внимание на ветку верхнегибридных колебаний, которая при  $\xi_{Te} \ll 1$  может далеко отстоять от  $n\omega_e$ . Эти колебания, так же как и циклотронные, описываются уравнением (1.71). Потенциальные колебания в области частот  $\omega \approx n\omega_e$  иногда называют модами Бернштейна.

Что касается существенно непотенциальных колебаний, то их частота при любых значениях волнового вектора лежит ниже  $n\omega_e$  [см. (1.73), (1.74)]. На рис. 1.21 графики зависимости частоты непотенциальных колебаний от  $\xi_{Te}$  отмечены цифрой 2. Отметим, что для непотенциальных колебаний характерные значения величины  $|\Delta_{ne}|$  по порядку не превышают  $q_e (v_{Te}/c)^2$ . Для того чтобы устранить влияние релятивизма (см. предыдущий подраздел), должно выполняться условие  $|\Delta_{ne}| \gg (v_{Te}/c)^2$ . Поэтому непотенциальные колебания существуют лишь в плазме достаточно высокой плотности с  $q_e \gg 1$  ( $\beta_e^{(p)} \gg 1$ ).

Законы дисперсии [зависимость  $\omega(k)$ ] собственно циклотронных колебаний проверяли в довольно многочисленных экспериментах с низкотемпературной газоразрядной или щелочной плазмой [7, 24, 85, 86]. В газоразрядной плазме  $T_e \leq 10$  эВ, а  $T_i$  в  $10^2$ — $10^3$  раз меньше; в плазме щелочных металлов темпера-

тура обеих компонент плазмы порядка 0,1 эВ. Плотность плазмы может изменяться в довольно широких пределах — от  $10^8$  до  $10^{13}$  см $^{-3}$ . Магнитное поле выбирают таким, чтобы ларморовский радиус заряженных частиц был мал по сравнению с размером системы поперек магнитного поля, а циклотронные частоты  $\omega_j$  превышали частоты соударений  $\nu_j$ . При таких значениях индукции магнитного поля  $B \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$  Тл давление плазмы пренебрежимо мало по сравнению с давлением магнитного поля. Естественно, что в таких условиях могут быть исследованы только потенциальные ветки циклотронных колебаний. Обычно колебания возбуждаются зондом, потенциал которого изменяется с заданной частотой. В эксперименте измеряют фазовый сдвиг сигнала, поступающего на приемный зонд, и по нему определяют длину волны колебаний.

Приведем результаты характерного эксперимента [85]. В этой работе изучали дисперсию потенциальных электронных циклотронных колебаний (рис. 1.22). Установлено, что экспериментальные результаты находятся в хорошем соответствии с предсказаниями теории. Подтверждено изменение характера зависимости  $\omega(k)$  при переходе из области частот  $\omega < \omega_{вг}$  к  $\omega > \omega_{вг}$ .

## 2. Циклотронные колебания в неоднородном магнитном поле

### 2.1. Резонансное циклотронное взаимодействие в неоднородном магнитном поле

#### 2.1.1. Резонансное взаимодействие в плазме и псевдоволны.

Псевдоволны и индивидуальные степени свободы в плазме. Динамику резонансного циклотронного взаимодействия в неоднородном магнитном поле невозможно описать, не прибегая к понятию так называемых псевдоволн. В теории плазмы это понятие используют не так уж часто. Поэтому представляется уместным вкратце осветить роль, которую псевдоволны играют в физике плазмы и в особенности в процессах резонансного взаимодействия колебаний с заряженными частицами.

Анализ эволюции начальных возмущений в плазме показывает, что самосогласованных (собственных) колебаний недостаточно для определения эволюции произвольного начального возмущения, так как они не составляют полной системы [87, 88]. Недостаточность решений вида  $\exp(-i\omega t + ikr)$  видна уже из того, что они дают лишь  $\infty^3$  множество решений (соответственно трем независимым параметрам:  $k_x, k_y, k_z$ ), между тем как в действительности должно иметься  $\infty^6$  — множество решений (уравнения содержат шесть независимых переменных:  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$ ) [87]. Действительно, с помощью самосогласованных колебаний, для которых характерно организованное движение заряженных частиц, можно описать возбуждение коллективных степеней свободы. Между тем в плазме кулоновское взаимодействие коллективизирует лишь малую долю степеней свободы заряженных частиц, и основную часть степеней свободы следует считать индивидуальными [89]. Одновременное существование коллективных и индивидуальных степеней свободы является специфическим свойством плазмы, отличающим ее от других сплошных сред. Эта особенность обусловлена дальнедействующим характером кулоновских сил. Согласно А. А. Власову частица плазмы успевает «почувст-

вывать» влияние коллектива до того, как столкнется со своей ближайшей соседкой. На столь малых интервалах времени (в других отношениях они могут оказаться достаточно большими) отдельные заряженные частицы движутся почти свободно.

По-иному обстоит дело, например, в обычном газе. Разреженный (кнудсеновский) газ является собранием независимых частиц, в нем коллективные степени свободы отсутствуют. С повышением плотности возникают коллективные степени свободы (звуковые волны), однако одновременно индивидуальные степени свободы заканчивают независимое существование.

Образования, представляющие индивидуальные степени свободы, введены в теорию колебаний плазмы Ван-Кампеном [88]. В простейшем случае однородной немагнитной плазмы это однородные пучки заряженных частиц, плотность которых модулирована в направлении движения. Очевидно, что если скорость пучка равна  $v$ , а длина волны модуляции  $2\pi/k$ , то в лабораторной системе координат наблюдается волна электрического потенциала с частотой  $\omega = kv$ . Подобные волны называют волнами Ван-Кампена, а в случае неоднородных течений плазмы и жидкости — волнами Ван-Кампена — Кейза, волнами, вызываемыми модулированными пучками, баллистическими модами и, наконец, псевдодолнами. Последнее название имеет преимущество в краткости и подчеркивает «неполноценный» характер этих волн: их распространение есть лишь имитация волнового процесса. Проявляется это, в частности, в крайней неустойчивости псевдодолн, «рассыпающихся» под действием малых возмущений.

Рассмотрим например, как влияет на описанную выше псевдодолну электрического потенциала небольшой разброс в значениях скорости заряженных частиц, образующих ее ( $\delta v \ll v$ ). При наличии разброса рассматриваемое образование можно считать составленным из непрерывного набора псевдодолн, движущихся с различными скоростями. В короткие интервалы времени  $t \ll (k\delta v)^{-1}$  влияние разброса не успевает проявиться. Однако через время порядка  $(k\delta v)^{-1}$  отдельные псевдодолны сдвигаются относительно друг друга на расстояние порядка длины волны, при этом начальная модуляция «замазывается», а следовательно, колебания затухают. Закон затухания легко можно найти; например, в случае гауссовского распределения заряженных частиц по скоростям  $f(v) = \pi^{-1/2}(\delta v)^{-1} \exp[-(v-v_0)^2/(\delta v)^2]$ . Если в начальный момент плотность частиц модулирована по гармоническому закону  $n(x, 0) = n \exp(ikx)$ , то, используя уравнение траектории  $x(t) = x(0) + vt$ , получаем

$$n(x, t) = n \int dv f(v) \exp[ik(x - vt)] = n \exp[ik(x - v_0 t) - (kt\delta v/2)^2]. \quad (2.1)$$

Очевидно, что по закону  $\exp\{-(1/2)kt\delta v\}^2$  затухают и возмущения потенциала, вызываемые данным образованием.

Рассмотрим теперь влияние кулоновских соударений. Соударения должны приводить к уширению пучка в пространстве ско-

ростей, причем в силу их диффузионного характера ширина  $\delta\nu$  при  $t \ll \nu^{-1}$  изменяется по закону  $\delta\nu \approx \nu_T(\nu t)^{1/2}$ , где  $\nu$  — частота кулоновских соударений;  $\nu_T$  — тепловая скорость. Подставляя выражение для  $\delta\nu$  в (2.1), находим

$$n(x, t) \approx n \exp [ik(x - \nu_0 t) - (k\nu_T/2)^2 \nu t^3]. \quad (2.2)$$

Этот закон затухания получен в [90] более строгим методом.

Выражения (2.1), (2.2) показывают, что для псевдоволн характерно более резкое затухание, чем для самосогласованных колебаний, амплитуда которых в стационарных системах уменьшается во времени по простому экспоненциальному закону  $\exp(-\gamma t)$ .

«Задача» псевдоволн в теории плазмы — представить методами теории сплошной среды эффекты, обусловленные дискретностью строения плазмы. Сама постановка задачи противоречива, поэтому не удивительно, что некоторые свойства псевдоволн не согласуются с дискретностью плазмы. Так, хотя из псевдоволн можно составить частицеподобное образование, неизбежные в реальных условиях случайные воздействия, а также разброс в скоростях отдельных псевдоволн в конце концов приводят к его распаду.

Неадекватность методов теории сплошных сред избранной задаче приводит также к тому, что при определенных условиях отдельная псевдоволна становится неотличимой от самосогласованных колебаний. Действительно, рассмотрим плазму плотностью  $n_0$ , в которой имеется пучок электронов с плотностью  $n'_0$  ( $n'_0 \ll n_0$ ) и со скоростью  $V_0$ . Дисперсионное уравнение, определяющее частоту самосогласованных потенциальных колебаний такой системы, имеет вид

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} - \frac{\omega'^2}{\omega_{pe}^2} (\omega - kV_0)^2 = 0.$$

При  $kV_0 \gg \omega_{pe}$  самосогласованные колебания разделяются на «плазменные» с частотой  $\omega \approx \pm \omega_{pe}$  и «пучковые» с частотой  $\omega \approx kV_0 \pm \omega'_{pe}$ . Пусть в начальный момент времени плотность пучка промодулирована в направлении движения. При  $t \ll (\omega_{pe}')^{-1}$  отличие частот пучковых колебаний от  $kV_0$  не успевает проявиться и электрическое поле, вызванное модуляцией пучка, ведет себя как псевдоволна. Однако при  $t \geq (\omega_{pe}')^{-1}$  в лабораторной системе координат можно зафиксировать две волны с фазовыми скоростями, отличными от  $kV_0$ . Под влиянием кулоновских соударений скорость электронов пучка изменяется во времени, т. е. система становится нестационарной. Именно по этой причине собственные колебания пучка затухают более резко, чем по простому экспоненциальному закону.

Псевдоволны и затухание Ландау. Поскольку псевдоволны представляют в колебаниях плазмы индивидуальные степени свободы, то вполне естественно, что резонансный обмен энергией между самосогласованными колебаниями и отдельными частицами осуществляется через возбуждение псевдоволн. Покажем, что это действительно так на примере наиболее известной и лучше всего изученной задачи о резонансном затухании электронных легмиуровских колебаний в однородной немагнитной

плазме с равновесным распределением электронов по скоростям (затухание Ландау). Рассмотрим плоскую стационарную волну вида  $\exp(-i\omega t + ikx)$ , распространяющуюся по плазме. Производя стандартную операцию линеаризации бесстолкновительного кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

по малым возмущениям, вызываемым волной, получаем

$$f_1 = \frac{1}{\omega - kv} \frac{ke}{m_e} \psi_1 \frac{df_0}{dv}. \quad (2.3)$$

Здесь, как обычно, индексом 1 отмечены величины, характеризующие волну, индексом 0 — величины, относящиеся к невозмущенному состоянию плазмы.

Из (2.3) следует, что возмущение функции распределения электронов обращается в бесконечность при скорости, равной фазовой скорости волны. Сингулярность отражает неограниченное ускорение резонансных электронов, для которых электрическое поле волны постоянно во времени. Однако величины, имеющие физический смысл, а к ним относится и функция распределения, должны быть **конечны**. Наличие же особенности свидетельствует о том, что наше рассмотрение не учитывает каких-то процессов, существенных для анализируемого явления. В данном случае к ограничению ускорения могут привести, например, кулоновские соударения. Действительно, соударения изменяют скорость частиц, а следовательно, выбивают их из резонанса с волной.

Проследим за динамикой резонансных электронов, принимая во внимание действие кулоновских соударений. Рассмотрим волну электрического потенциала, распространяющуюся вдоль  $OX$  (рис. 2.1). Электроны, попавшие в ускоряющую фазу, увеличивают свою скорость. Это означает, что распределение электронов по скоростям сдвинется по оси скоростей вправо. Если  $df_0/dv < 0$ , что имеет место для максвелловского распределения, то число электронов, скорость которых равна фазовой, возрастет. В области, где электрическое поле замедляет электроны, число резонансных электронов уменьшится. Иными словами, возникнет псевдволна, движущаяся со скоростью, равной фазовой скорости исходной волны, и сдвинутая по фазе относительно возмущения потенциала на  $-\pi/2$  (рис. 2.1). Поскольку максимумы плотности псевдволны попадают на ускоряющую фазу, а минимумы — на замедляющую, то в среднем энергия будет переходить от самосогласованных колебаний к псевдволне. Этот результат вполне естествен. Действительно, количество энергии, приходящейся на степени свободы в состоянии резонанса, должно выравниваться. Выше же предполагалось, что первоначально была возбуждена лишь коллективная степень свободы (самосогласованные колебания).



Из (2.2) следует, что кулоновские соударения разрушат псевдоволну за время  $\tau \sim (k v T)^{-2/3} v^{-1/3}$ . Однако если амплитуда самосогласованных колебаний поддерживается на одном и том же уровне, то они постоянно воссоздают псевдоволну. Таким образом, при наличии кулоновских соударений имеет место «проток» электронов через состояние псевдоволны.

Отметим, что хотя взаимодействие резонансных частиц с волной и называют бесстолкновительным, только кулоновские соударения создают условия для постоянной перекачки энергии от самосогласованных колебаний к заряженным частицам. Да и само

Рис. 2.1. Образование псевдоволны при резонансном взаимодействии в немагнитной плазме:

1 — возмущение электрического потенциала;  
2 — возмущение плотности резонансных электронов



понятие резонансных частиц, как отмечено в п. 1.1.3, становится физически определенным лишь при наличии соударений. В данном случае резонансными следует считать частицы, скорости которых отличаются от фазовой скорости волны на  $\delta v \ll (k \tau_d)^{-1}$ . Поскольку, следовательно, число резонансных частиц пропорционально  $\tau_d^{-1} \propto v^{1/3}$ , а время пребывания отдельной частицы в состоянии резонанса  $\tau_d \propto v^{-1/3}$ , то результат взаимодействия (количество передаваемой энергии) не зависит от частоты соударений. Это обстоятельство и оправдывает использование термина «бесстолкновительное резонансное взаимодействие». Влияние кулоновских соударений можно учесть в исходном уравнении (2.3), введя в него слагаемое  $f_1/\tau_d$ . Этого достаточно для того, чтобы включить в рассмотрение эффект уничтожения псевдоволны за время  $\tau_d$ . Наличие в (2.3) дополнительного слагаемого приводит в (2.3) к замене  $\omega \rightarrow \omega + i/\tau_d$ .

Моменты функции распределения  $f_1$  определяют возмущение плотности электронов и все другие макроскопические величины. Если тепловая скорость электронов значительно превышает  $(k \tau_d)^{-1}$ , то при вычислении моментов для резонансного знаменателя можно использовать представление

$$\frac{1}{\omega - kv + i/\tau_d} \approx P \frac{1}{\omega - kv} - i \pi \delta(\omega - kv).$$

Соответственно вместо (2.3) получаем

$$f_1 = P \frac{1}{\omega - kv} \frac{e}{m_e} k \psi_1 \frac{df_0}{dv} - i \pi \delta(\omega - kv) \frac{e}{m_e} k \psi_1 \frac{df_0}{dv}. \quad (2.4)$$

Нетрудно заметить, что второе слагаемое в этом выражении дает псевдоволну, описанную выше.

При вычислении моментов функции распределения выражения (2.3), (2.4) приводят к одним и тем же результатам, если (2.3) дополнить так называемым правилом обхода Ландау, т. е. рас-

смаatrивать колебания с  $\text{Im } \omega = 0$  как предельный случай колебаний с  $\text{Im } \omega > 0$ . Это правило, как известно, можно получить формально, если задачу о собственных колебаниях плазмы рассматривать как часть задачи об эволюции начальных возмущений и решать последнюю методом преобразования Лапласа, т. е. представлять произвольное возмущение в виде суперпозиции возмущений с  $\text{Im } \omega > 0$ . Однако при таком подходе остается в тени динамика процессов, приводящих к обмену энергией между самосогласованными колебаниями и заряженными частицами.

Из проведенного рассмотрения следует, что псевдоволны, возбуждаемые при резонансном взаимодействии, характеризуются той же пространственно-временной зависимостью, что и возбуждающие их самосогласованные колебания. Поэтому псевдоволны обычно включают в «отклик» плазмы на электромагнитное поле колебаний как его резонансную часть. В неоднородной стационарной плазме псевдоволна имеет ту же частоту, что и возбуждающие ее самосогласованные колебания, однако волновой вектор псевдоволны совпадает с волновым вектором самосогласованных колебаний лишь в одной точке — резонансной. На достаточно большом расстоянии от резонансной точки псевдоволна отделяется от самосогласованных колебаний и начинает самостоятельное существование. Если спустя некоторое время для псевдоволны опять выполняется условие фазового резонанса с самосогласованными колебаниями, то последние переизлучаются. Это явление лежит в основе эффектов нелокального отражения [91] и просветления волновых барьеров [92, 93]. В первом случае заряженные частицы, образующие псевдоволну, дважды проходят через резонансную точку, причем при втором прохождении они движутся навстречу исходной волне. (Изменение знака скорости может быть вызвано, например, отражением от пробки адиабатической ловушки.) Волна, излучаемая при повторном прохождении, движется в том же направлении, что и излучающие ее частицы, т. е. принимает форму отраженной.

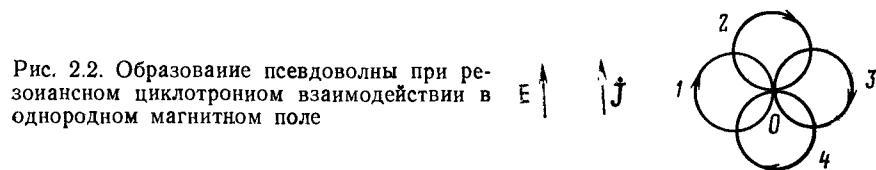
Эффект просветления волновых барьеров возникает, когда заряженные частицы проходят через резонансные точки, разделенные барьером непрозрачности для самосогласованных колебаний. Соответственно переизлучение, происходящее во второй резонансной точке, проявляется как подбарьерное просачивание волны.

Эти примеры показывают, что использование понятия псевдоволны особенно полезно при анализе резонансного взаимодействия в неоднородной плазме. Характерное для неоднородной плазмы отделение псевдоволн от самосогласованных колебаний вызвано тем, что заряженные частицы, из которых составлена псевдоволна, в результате теплового движения выходят из зоны резонансного взаимодействия. Конечность времени резонансного взаимодействия является дополнительным фактором, который может ограничивать амплитуду псевдоволны. Напомним, что в однородной плазме амплитуда псевдоволны ограничивается кулоновскими со-

ударениями (см. выше) или нелинейным эффектом изменения траектории заряженных частиц под действием поля самосогласованных колебаний [27, 28]. Нелинейность проявляется при достаточно большой амплитуде самосогласованных колебаний, возбуждающих псевдоволну. Нелинейные эффекты подобного рода рассмотрены в гл. 3.

**2.1.2. Псевдоволны и резонансное циклотронное взаимодействие в неоднородном магнитном поле.** Образование псевдоволн в однородном магнитном поле. Прежде чем приступить к анализу резонансного циклотронного взаимодействия в неоднородном магнитном поле, рассмотрим более простой случай однородного магнитного поля. В области циклотронных частот  $\omega \approx \omega_j$  ( $j=e, i$ ) существует значительное число различных колебаний, различающихся поляризацией, показателем преломления и точными значениями частоты колебаний (см. разл. 1). Рассмотрим

Рис. 2.2. Образование псевдоволны при резонансном циклотронном взаимодействии в однородном магнитном поле



рим простейшие необыкновенные электронные циклотронные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля. Электрическое поле таких колебаний перпендикулярно основному магнитному полю и вращается в электронную сторону (см. п. 1.2.2). Его удобно характеризовать сочетанием  $E_- = E_x - iE_y$ . В уравнении движения электрона вместо отдельных компонент скорости  $v_x$  и  $v_y$  также удобно ввести величину  $v_- = v_x - i v_y$ . При этом получаем\*

$$\dot{v}_- + i\omega_e v_- = -(e/m_e) E_- \exp(-i\omega t + ikv_{\parallel} t). \quad (2.5)$$

Электроны, для которых выполняется резонансное условие  $\omega = kv + \omega_e$ , испытывают систематическое изменение скорости ларморовского вращения под действием волны:

$$v_-(t) = (v_-(0) - (e/m_e) E_- t) \exp(-i\omega_e t).$$

Рассмотрим детально, как происходит образование псевдоволны в этих условиях. На рис. 2.2 изображены некоторые из ларморовских окружностей, проходящих через выбранную произвольным образом точку 0. Пусть в начальный момент электрическое поле волны направлено вертикально вверх. Оно увеличивает скорость электронов, движущихся вниз, и уменьшает скорость электронов, движущихся вверх. В точке 0 электроны первого типа принадлежат к окружности 1, второго — к окружности 3. Если в отсутствие волны в точке 0 имела место компенсация микротоков, то под действием волны возникнет электрический ток, направленный

\* Если учесть действие магнитного поля волны, то в правой части уравнения (2.5) появится множитель  $(\omega - kv)/\omega$ .

вверх (средняя скорость электронов будет направлена вниз). Через четверть периода ток в точке 0 будет определяться электронами, движущимися по окружностям 2 и 4, причем вектор тока будет повернут по часовой стрелке на  $\pi/2$ , и т. д. Таким образом, в плоскостях  $z = \text{const}$  возникнут сфазированные токи, вращающиеся в электронную сторону. Они будут переноситься вдоль  $\mathbf{B}_0$  со скоростью резонансных электронов  $v_{\parallel}$ . Иными словами, в плазме возникнет псевдволна электрического тока. Как и в случае потенциальных колебаний, рассмотренных выше, затухание циклотронных псевдволн вызывается кулоновскими столкновениями, изменяющими продольную скорость.

**Образование псевдволн в неоднородном магнитном поле.** Предположим теперь, что колебания, рассматривавшиеся в п. 2.1.1, распространяются в неоднородном магнитном поле. Будем считать, что  $\nabla B_0$  направлен вдоль вектора  $\mathbf{B}_0$ .

Для различных электронов из распределения по продольным скоростям резонансное условие  $\omega = \omega_e(z) + kv_{\parallel}$  будет выполняться в различных точках  $z_S(v_{\parallel})$ . Разброс в значениях  $z_S(v_{\parallel})$  несуществен (см. ниже) при выполнении условия  $k(\rho_e L)^{1/2} \ll 1$ , где  $L = [(1/\omega_e) \times (d\omega_e/dz)]_{z=z_S}^{-1}$  — характерный масштаб изменения магнитного поля.

В этом случае можно говорить о единой резонансной точке для всех электронов. В ее окрестности вектор скорости электрона и электрический вектор волны некоторое время вращаются синхронно. За это время и происходит существенное — резонансное изменение скорости электрона. Найдем приращение скорости. В неоднородном магнитном поле частота  $\omega_e$  на траектории электрона является функцией времени  $\omega_e(t) = \omega_e(z(t))$ , где  $z(t) = z(0) + v_{\parallel} t$ .

При этом решение уравнения (2.5) принимает вид

$$v_{-}(t) = \left\{ v_{-}(0) - \frac{e}{m_e} E_{-} \int_0^t dt' \exp \left( -i \omega t' + i k v_{\parallel} t' + i \int_0^{t'} \omega_e(t'') dt'' \right) \right\} \exp \left( -i \int_0^t \omega_e(t') dt' \right). \quad (2.6)$$

Рассмотрим большие интервалы времени  $t \gg (\delta\omega_e)^{-1}$ , где  $\delta\omega_e$  — изменение электронной циклотронной частоты на траектории электрона. В этом случае при вычислении интеграла по  $dt'$  в (2.6) можно использовать асимптотические методы. Если электрон еще не дошел до резонансной точки ( $t < t_S$ ,  $z(t_S) = z_S$ ), то асимптотика  $v_{-}(t)$  имеет вид

$$v_{-}(t) \approx v_{-}(0) \exp \left( -i \int_0^t \omega_e(t') dt' \right) - \frac{i e}{m_e} E_{-} \frac{t}{\omega - \omega_e(z_e(t))} \exp \left( -i \omega t + i k v_{\parallel} t \right). \quad (2.7)$$

Здесь первое слагаемое описывает «свободное» — циклотронное вращение электрона, второе — движение, вызываемое полем волны. Во втором слагаемом учтен вклад только верхнего предела интегрирования  $t'=t$ , так как считается, что электрон успел «забыть» о моменте «включения» поля  $t'=0$ .

При  $t > t_S$  следует дополнительно учесть вклад резонансной точки. Это точка стационарной фазы подынтегрального выражения в (2.6):

$$v_-(t) = \left\{ v_-(0) - \frac{e}{m_e} E_- [(2\pi/v_{\parallel})(d\omega_e/dz)_{z=z_S}^{-1}]^{1/2} \exp \left[ -i(\omega - kv_{\parallel})t_S + \right. \right. \\ \left. \left. + i \int_0^{t_S} \omega_e(z(t')) dt' + i\pi/4 \right] \right\} \exp \left\{ -i \int_0^t \omega_e(z(t')) dt' \right\} - \\ - \frac{ie}{m_e} E_- \frac{1}{\omega - \omega_e[z(t)]} \exp \left[ -i(\omega - kv_{\parallel})t \right]. \quad (2.8)$$

Из сопоставления (2.7) и (2.8) следует, что после прохождения резонансной точки амплитуда и фаза циклотронного вращения изменяются, причем приращение таково, как если бы электрон находился в состоянии резонанса, время  $\delta t_S = [(2\pi/v_{\parallel})(d\omega_e/dz)_{z=z_S}^{-1}]^{1/2}$ .

а фаза приращения сдвинута относительно фазы поля в момент прохождения резонансной точки на  $\pi/4$ . Время резонансного взаимодействия можно оценить следующим образом. Введем фазу ларморовского вращения, отсчитываемую от фазы волны на траектории электрона:

$$\Phi = \int_{t_S}^t dt' \omega_e(z(t')) - (\omega - kv_{\parallel})(t - t_S). \quad (2.9)$$

Будем считать в этом выражении  $\omega_e(z) = \omega - kv_{\parallel} + (z - z_S)(d\omega_e/dz)|_{z=z_S}$ ,  $z - z_S = v_{\parallel}(t - t_S)$ . Из (2.9) следует, что если определить состояние резонанса как состояние, в котором  $|\Phi(t)|$  не превышает  $\pi/2$ , то эффективное время резонансного взаимодействия окажется равным  $\delta t_S = [(2\pi/v_{\parallel})(d\omega_e/dz)_{z=z_S}^{-1}]^{1/2}$  (см. выше). За время  $\delta t_S$  электрон пройдет расстояние  $\delta z_S = [2\pi v_{\parallel}(d\omega_e/dz)_{z=z_S}^{-1}]^{1/2}$ . Это расстояние можно

принять за размер зоны резонансного взаимодействия.

Предположим, что на резонансную точку набегают стационарный поток электронов, движущихся со скоростью  $v_{\parallel}$ . В пределах резонансной зоны колебания взаимодействуют с электронами так же, как в однородном магнитном поле. Следовательно, в этой области должна образоваться псевдоволна. В силу стационарности системы частота псевдоволны во всем пространстве должна быть равна  $\omega$ . Учитывая это обстоятельство, из (2.8) находим,

что полная пространственно-временная зависимость фазы псевдоволны дается выражением

$$\Phi_p = -\omega t - \int_{z_S}^z \frac{dz'}{z_{\parallel}} (\omega_e(z') - \omega) = -\omega t + k(z - z_S) - \frac{1}{2v_{\parallel}} \frac{d\omega_e}{dz} (z - z_S)^2. \quad (2.10)$$

Фаза псевдоволны отличается от фазы первичных, возбуждающих колебаний последним слагаемым. Таким образом, как и указывалось выше, благодаря неоднородности магнитного поля псевдоволна «отделяется» от первичной волны.

Решение Брамбиллы. Псевдоволны возбуждаются электрическим полем самосогласованных колебаний в резонансной точке и могут переносить информацию об этом поле на значительное расстояние. В результате электрический ток вне резонансной зоны оказывается связанным с полем в резонансной точке и, следовательно, волновое уравнение становится нелокальным. Это вполне естественно, так как обсуждаемая задача принадлежит к классу задач об электромагнитных колебаниях неоднородной среды при учете пространственной дисперсии. (В данном случае пространственная дисперсия обусловливается движением электронов вдоль магнитного поля.) Такие задачи, как известно, описываются нелокальными — интегральными волновыми уравнениями. Однако в одном частном случае удалось интегральное волновое уравнение свести к дифференциальному, которое затем было решено методом преобразования Лапласа [94]. Результаты, полученные в [94], подтверждают качественные соображения, приведенные выше. В [94] рассматривался поток электронов, движущийся со скоростью  $v_{\parallel}$  вдоль магнитного поля, линейно меняющегося с координатой  $z$ . Считалось, что электромагнитные колебания распространяются в том же направлении.

Распространение колебаний описывается волновым уравнением

$$E''_- + (\omega/c)^2 E_- = (4\pi i \omega/c^2) j_-, \quad (2.11)$$

где ток  $j_-(z) = -en_0 v_-(z)$ . Возмущение скорости электронов, вызываемое волной, учитывая (2.6), представим в виде

$$v_-(z) = -\frac{e}{m_e} E_- \int_{-\infty}^z \frac{dz'}{v_{\parallel}} E_-(z') \exp\left(-i \int_{z'}^z (\omega_e(z'') - \omega) \frac{dz''}{v_{\parallel}}\right).$$

Здесь считается  $v_{\parallel} > 0$ , и поэтому момент „включения“ поля волны отнесен на  $t = z/v_{\parallel} = -\infty$ ; зависимость  $E_-(z)$  в отличие от (2.6),

где волна считалась плоской, не конкретизируется. Сдвигая начало координат в резонансную точку ( $\omega_e(0) = \omega$ ) и принимая ли-

нейную зависимость магнитного поля от координаты, приводим уравнение (2.11) к виду

$$E''_- + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_- + \frac{i \omega \omega_{pe}^2}{v_{||} c^2} \int_{-\infty}^z dz' E_-(z') \exp\left(-\frac{i}{2v_{||}} \frac{d\omega_e}{dz} (z^2 - z'^2)\right). \quad (2.12)$$

Умножим уравнение (2.12) на  $\exp[(i/2v_{||})(d\omega_e/dz)z^2]$ , после чего продифференцируем его по  $z$  и, наконец, умножим на  $\exp[-(i/2v_{||})(d\omega_e/dz)z^2]$ . В результате получим

$$E'''_- - 2ib_*^2 Z E''_- + E'_- + 2ib_*^2 (\Gamma/\pi - Z) E_- = 0. \quad (2.13)$$

Здесь  $\Gamma = \pi(\omega_{pe}^2/\omega^2 c)(d\omega_e/dz)_{z=z_S}^{-1}$ ;  $b_*^2 = -(1/2v_{||})(d\omega_e/dz)(c/\omega)^2 > 0$ ;

$Z = z\omega/c$ .

При  $|Z| \rightarrow \infty$  решения уравнения (2.13) делятся на два класса: медленно меняющиеся, описывающие волны в вакууме, —  $E_{-,1,2} \sim \exp(\pm iZ)$ , и быстро меняющейся —  $E_{-,3} \sim \exp(ib_*^2 Z^2)$ . Фаза последнего решения совпадает с пространственной частью  $\Phi_p(t, z)$  [см. (2.10)] при  $z \rightarrow \infty$ , а само это решение описывает псевдоволну, уходящую от резонансной точки  $z=0$ . Возникновение в точке  $z=0$  псевдоволны следует из решения уравнения (2.13), полученного в [94] методом преобразования Лапласа. Соответствующий анализ дан в приложении П.1, здесь же приведем лишь конечные результаты.

Асимптотика решения, представляющего волну, набегающую на резонансную точку со стороны отрицательных значений координаты  $z$ , имеет вид

$$E_-(Z) \approx |Z|^{-1\Gamma/2\pi} \exp(iZ). \quad (2.14)$$

Аналитическое продолжение этого решения на область  $Z > 0$  дает

$$E_-(Z) \approx |Z|^{-1\Gamma/2\pi} \exp(iZ - \Gamma/2) + \\ + [\pi^{1/2} 2^{\Gamma/2\pi} / b_*^3 Z^2 (i\Gamma/2\pi - 1)!] \exp(ib_*^2 Z^2 + (i/4)(\Gamma + \pi)). \quad (2.15)$$

Из сопоставления (2.14), (2.15) следует, что при прохождении через резонансную точку амплитуда «вакуумного» решения [см. (2.14)] и первое слагаемое в (2.15) уменьшаются в  $\exp(\Gamma/2)$  раз. Этот эффект обусловлен поглощением колебаний в резонансной точке. Резонансное взаимодействие приводит к образованию псевдоволны, уходящей от резонансной точки вместе с потоком электронов [см. второе слагаемое в (2.15)]. При  $Z \gg b_*^{-2}$  характерный пространственный масштаб псевдоволны мал по сравнению с  $l$  — безразмерной длиной волны света в вакууме. Следовательно, образование псевдоволны можно рассматривать как перекачку энергии от крупномасштабных колебаний к мелкомасштабным. Подобные явления принято называть трансформацией колебаний. В данном случае коэффициент транс-

формации (доля передаваемой энергии), как следует из (2.14) и (2.15), равен:

$$\eta = 1 - \exp(-\Gamma). \quad (2.16)$$

Явление трансформации характерно для колебаний, описываемых уравнениями типа (2.13). Такие уравнению имеют два класса решений: крупномасштабные и мелкомасштабные (в данном случае  $E_{-;1,2}$  и  $E_{-;3}$  соответственно). В окрестности точки, где коэффициент перед второй производной обращается в нуль, масштабы решений сравниваются, а сами решения трансформируются (переходят друг в друга).

Псевдоволны в экспериментах на установке АС. Решение, описывающее псевдоволну, было получено выше в предположении, что распределение электронов по продольным скоростям имеет вид  $\delta$ -функции. Именно поэтому уменьшение амплитуды псевдоволны с удалением от резонансной точки было довольно слабым — степенным. Влияние разброса по продольным скоростям на циклотронные псевдоволны подробно обсуждается ниже. Здесь же заметим, что, представляя непрерывное распределение по  $v_{\parallel}$  в виде набора  $\delta$ -функций, приходим к выводу о возбуждении в резонансной точке непрерывного спектра псевдоволн. Каждая из них характеризуется своим значением  $b_*^2 = -(1/2v_{\parallel})(dw_e/dz)(c/\omega)^2$ , определяющим пространственный масштаб псевдоволны. С удалением от резонансной точки отдельные псевдоволны сдвигаются по фазе, и когда характерный сдвиг превышает  $\pi$ , результирующая псевдоволна исчезает из-за интерференции.

Таким образом, приходим к заключению, что экспериментальное наблюдение псевдоволн облегчается с уменьшением разброса по продольным скоростям. Распределения с довольно малым разбросом по продольным скоростям создавались в экспериментах на установке АС (ИАЭ им. И. В. Курчатова, 1965—1970 гг.) [32]. Установка АС (адиабатическое сжатие) представляла собой простейшую аксиально-симметричную адиабатическую ловушку. В ней ионная компонента плазмы состоит из двух пучков, движущихся вдоль магнитного поля навстречу друг другу и отражающихся от магнитных пробок. Из-за того что и распределение по поперечным скоростям также неравновесно — имеет вид  $\delta$ -функции (см. п. 1.1.4), в установке возбуждается ионная циклотронная неустойчивость. Спектр неустойчивых колебаний располагается вблизи минимального значения ионной циклотронной частоты в ловушке  $\omega_{i0} \approx 2 \cdot 10^7$  рад/с и довольно узкий  $\Delta\omega \approx 10^6$  рад/с. Весьма интересные результаты дали измерения пространственной корреляционной функции

$$A_{1,2} = \langle E(z_1, t) E(z_2, t) \rangle / (\langle E^2(z_1, t) \rangle \langle E^2(z_2, t) \rangle)^{1/2}.$$

Здесь скобки означают усреднение по времени (рис. 2.3) [95]. На графике зависимости  $A_{1,2}$  от  $z_2 - z_1$  выделяются два масштаба корреляции: большой  $l_1 \approx 200$  см и малый  $l_2 \ll 0,1l_1$ . Наличие двух



корреляционных масштабов свидетельствует о присутствии двух волновых процессов. Они имеют одну и ту же частоту, но различаются пространственными свойствами. Очевидно, что длина волны не может превышать характерного корреляционного масштаба. Поэтому следует считать, что плохо скоррелированный в пространстве процесс обязан коротковолновым колебаниям с длиной волны  $\lambda_z \leq 20$  см. В то же время непосредственные измерения показали, что в плазме имеются и длинноволновые колебания с  $\lambda_z \approx 130$  см, которые естественно сопоставить с большим масштабом корреляции. Заметим, что в силу низкой разрешаю-

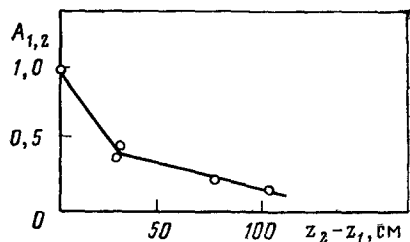


Рис. 2.3. Корреляция циклотронных колебаний вдоль оси установки АС ( $A_{1,2}$  — нормированная корреляционная функция колебаний в точках  $z_1, z_2$ )

щей способности аппаратуры (зонды были разнесены на 30 см) колебания с  $\lambda_z \leq 30$  см не могли быть обнаружены в измерениях. По этой же причине значение  $l_2 \approx 20$  см — верхняя граница для меньшего корреляционного масштаба.

Таким образом, при анализе экспериментов на установке АС столкнулись с необычной ситуацией, когда одну и ту же частоту имеют два типа колебаний с различной длиной волны и различным образом скоррелированных в пространстве. Однако именно этого и следовало ожидать, если принять во внимание, что при резонансном взаимодействии с ионами самопроизвольно возникающих самосогласованных циклотронных колебаний должны возбуждаться псевдоволны [95, 96]. Действительно, фаза псевдоволны однозначно связана с фазой самосогласованных (первичных) колебаний в момент образования псевдоволны, т. е. прохождения потока ионов через точку циклотронного резонанса. Если фаза первичных колебаний скоррелирована на интервалах времени порядка  $\Delta t \sim (\Delta\omega)^{-1}$ , то при равномерном движении ионов со скоростью  $v_{\parallel}$  вторичная волна (псевдоволна) за это время уйдет от резонансной точки на расстояние  $\Delta z \approx v_{\parallel} \Delta t$ . Именно таким и будет пространственный масштаб корреляции вторичных колебаний  $l_2$ . Характерное время корреляции рассматриваемых колебаний  $\Delta t \approx 10^{-6}$  с примерно на порядок меньше периода колебаний иона по ловушке  $T_b = 2\pi L_0 / v_{\parallel} \approx 10^{-6}$  с, где  $L_0 = [(1/\omega_e)(d^2\omega_e/dz^2)]^{-1/2}_{z=0} \approx 200$  см,  $v_{\parallel} \approx 1,3 \cdot 10^8$  см/с, точке  $z=0$  соответствует минимум магнитного поля. Таким образом, в условиях установки АС действительно должен был наблюдаться эффект пространственной расфазировки самосогласованных колебаний и псевдоволн.

При измерениях опорная точка  $z_1$  была расположена у самого края плазмы. В этой области ион движется по закону  $z - z_1 \approx \approx (v_{\perp} v_{\parallel 0} / 2L_0) t^2$ , где  $v_{\parallel 0} \approx 5 \cdot 10^7$  см/с — продольная скорость иона в минимуме магнитного поля. За характерное время изменения фазы колебаний ион смещается примерно на 20 см, что хорошо согласуется с экспериментальным значением малого масштаба корреляции  $l_2 \ll 20$  см.

Большой корреляционный масштаб естественно связать с распространением самосогласованных колебаний  $l_1 \approx V_{гp} \Delta t$ , где  $V_{гp} = = \omega_{pe} / k_{\parallel}$  — групповая скорость замагниченных электронных ленгмюровских колебаний ( $\omega = \omega_{pe} k_{\parallel} / k$ ). Ряд соображений [97] показывает, что в обсуждаемых экспериментах раскачивались именно эти колебания. Определенное таким образом значение  $l_1$  примерно согласуется с найденным в эксперименте.

К сожалению, излагаемая интерпретация была дана уже после окончания экспериментов на установке АС. По-видимому, по этой причине измерениям пространственной корреляции не было уделено достаточного внимания. Между тем более детальные измерения могли бы дать довольно интересные результаты. Рассмотрим, например, каков должен быть вид пространственной корреляционной функции при выполнении условия  $l_2 < l_3 \ll l_1$ , где  $l_3$  — характерный масштаб затухания псевдоволны, из-за разброса в значениях продольной скорости ионов. Его можно оценить следующим образом. При резонансе в минимуме магнитного поля пространственную часть фазы псевдоволны находим, используя аналогию со случаем линейно меняющегося поля (2.10):

$$\Phi_p(z) \approx \int_{z_s}^z \frac{dz'}{v_{\parallel}} \omega_i(z') \approx \frac{\omega_{i0} z^3}{3L_0^2 v_{\parallel}},$$

где  $\omega_{i0}$  — минимальное значение циклотронной частоты; влияние эффекта Доплера не учитывается. Из этого выражения следует, что если разброс в значениях  $v_{\parallel}$  равен  $\delta v_{\parallel}$ , то псевдоволна затухает на расстоянии  $l_3 \approx (L_0^2 v_{\parallel}^2 / \omega_{i0} \delta v_{\parallel})^{1/3}$ .

Пусть опорная точка  $z_1$  совпадает с минимумом магнитного поля (точкой циклотронного резонанса). Для этого случая пространственная корреляционная функция схематически изображена на рис. 2.4. В области 1 корреляция полная (псевдоволна и самосогласованные колебания скоррелированы). В области 2 фаза псевдоволны «сбивается» относительно фазы самосогласованных колебаний. В результате амплитуда корреляционной функции падает. Однако в области 3, где псевдоволна отсутствует и остаются лишь самосогласованные колебания, амплитуда нормированной корреляционной функции опять возрастает до своего максимального значения (1). Если опорная точка смещена от центра

ловушки на расстояние, большее  $l_2$ , но меньше  $l_3$ , пространственная корреляционная функция принимает вид, показанный на рис. 2.5. Характерный масштаб спада с удалением от опорной точки по-прежнему равен  $l_2$ . Симметрия рис. 2.4, 2.5 относительно центра системы обусловлена симметрией профиля магнитного поля адиабатической ловушки и симметрией функции распределения ионов по продольным скоростям  $f(v_{\parallel 0}) = f(-v_{\parallel 0})$ .

**2.1.3. Адиабатические волновые уравнения и правило обхода Ландау.** Выше было отмечено, что распространение колебаний через точку циклотронного резонанса описывается существенно нелокальным-интегральным волновым уравнением. Это уравнение

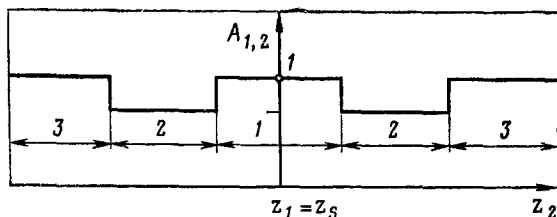


Рис. 2.4. Пространственная корреляция циклотронных колебаний при  $z_1 = z_s$ : в области 1 самосогласованные колебания и псевдоволна скоррелированы; в области 2 корреляция между ними отсутствует; в области 3 псевдоволна затухла; резонансная точка  $z_s$  совпадает с минимумом магнитного поля

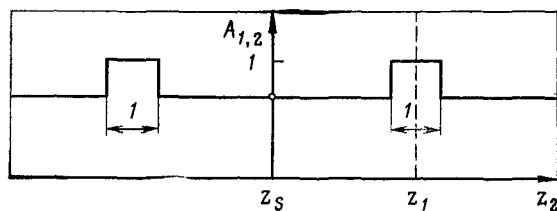


Рис. 2.5. Пространственная корреляция циклотронных колебаний при  $l_3 > z_1 - z_s > l_2$ , где  $l_2$  — корреляционный масштаб самосогласованных колебаний;  $l_3$  — длина затухания псевдоволны

пока что удалось решить лишь в одном частном случае, когда распределение заряженных частиц по продольным скоростям имеет вид  $\delta$ -функции (см. п. 2.1.2). Однако подобные распределения выделенные, и в большинстве реальных ситуаций разброс в значениях продольной скорости весьма велик. В таких случаях, как правило, используют упрощенные, адиабатические волновые уравнения. Это уравнения, взятые из теории распространения электромагнитных волн в однородной плазме, в которых неоднородность магнитного поля учитывается параметрически. Термин «адиабатический» обычно используют для колебательных систем, параметры которых изменяются незначительно за период колебаний. В п. 1.1.1. было показано, что в случае циклотронных колебаний эффективная частота, которую «видит» частица, равна  $\omega - n\omega_j$ . Эта частота изменяется на траектории частицы при дви-

жении ее вдоль неоднородного магнитного поля. Например, из соображений размерности нетрудно найти, что условие адиабатичности имеет вид  $|\omega - n\omega_j(\mathbf{r})|^2 \gg |v_{\parallel} d\omega_j/dz|$  и выполняется на достаточно больших расстояниях от резонансной точки. Одно из простейших адиабатических волновых уравнений — уравнение, описывающее распространение необыкновенных колебаний вдоль неоднородного магнитного поля, полученное в пренебрежении эффектами теплового движения заряженных частиц, т. е. в приближении холодной плазмы:

$$E''_{-} + (\omega/c)^2 [1 - \omega_p^2/\omega(\omega - \omega_e(z))] E_{-} = 0. \quad (2.17)$$

В точке циклотронного резонанса адиабатическое волновое уравнение имеет особенность, что свидетельствует о его неприменимости в окрестности этой точки (см. выше условие адиабатичности). Сингулярность возникает из-за того, что электроны, находящиеся в резонансной точке, пребывают в состоянии резонанса бесконечно долго. Учет теплового движения должен сделать волновое уравнение регулярным, однако для этого требуется выход за рамки адиабатического приближения.

Сравнительно простой способ регуляризации уравнений типа (2.17) состоит в учете столкновений. В данном случае столкновения меняют фазу циклотронного вращений электронов, тем самым ограничивая время однонаправленного изменения скорости ларморовского вращения. Для учета столкновений в (2.17) следует заменить  $\frac{1}{\omega - \omega_e(z)} \rightarrow \frac{1}{\omega - \omega_e(z) + i/\tau_d}$  (ср. с п. 2.1.1). Вве-

дение в резонансный знаменатель положительной мнимой добавки означает, что при нахождении решения уравнения (2.17) особая точка должна обходиться в соответствии с правилом обхода Ландау. Волновое уравнение, ставшее теперь регулярным, может быть решено во всей области изменения координаты  $z$  ( $-\infty < z < \infty$ ). Следует, однако, отметить, что, например, в условиях термоядерного эксперимента обычно с большим запасом выполняется условие  $|v_{\parallel} d\omega_e/dz|^{1/2} \gg v$ . Поэтому расфазировка в результате выхода частиц из резонансной зоны происходит намного раньше, чем успеет проявиться влияние столкновений. Возможность использования адиабатических волновых уравнений типа (2.17), дополненных правилом обхода Ландау, и в этих условиях была показана в [19, 97, 98]. Отметим также предшествующую работу [99].

Для вывода волнового уравнения, описывающего распространение необыкновенных колебаний в бесстолкновительной плазме при произвольном распределении электронов по скоростям, будем исходить из выражения (2.12), в котором последнее слагаемое следует усреднить по  $v_{\parallel}$  с функцией распределения  $f_0(v_{\parallel})$ . Для дальнейшего полезно от интегрирования по координате в (2.12) перейти к интегрированию по времени с помощью замены  $z(\tau) = z +$

$+v_{\parallel}\tau$ , а электрическое поле представить в виде интеграла Фурье  $E_{-}(z) = (2\pi)^{-1/2} \int dk E_{-}(k) \exp(ikz)$ . При этом для тока  $j_{-}$  получаем следующее выражение:

$$j_{-} = \frac{e^2 n_0}{m_e} \int dv_{\parallel} f_0(v_{\parallel}) \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int dk E_{-}(k) \times \\ \times \int_{-\infty}^0 d\tau \exp[-i\Phi(\tau, z, v_{\parallel}) - i\omega t + ikz], \quad (2.18)$$

где  $\Phi(\tau, z, v_{\parallel}) = \Delta\tau + \delta\tau^2$ ;  $\Delta = \omega - \omega_e(z) - kv_{\parallel}$ ;  $\delta = -(v_{\parallel}/2)(d\omega_e/dz)$ .

Используя одно из представлений интеграла вероятности

$$\int_{-\infty}^0 d\tau \exp(-ih_1\tau - ih_2\tau^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{ih_2} \right)^{1/2} W \left( \frac{h_1}{2(ih_2)^{1/2}} \right),$$

приводим (2.18) к виду

$$j_{-} = \frac{e^2 n_0}{2^{3/2} m_e} \int dv_{\parallel} f_0(v_{\parallel}) \times \\ \times \int dk E_{-}(k) \frac{1}{(ih_2)^{1/2}} W \left( \frac{h_1}{2(ih_2)^{1/2}} \right) \exp(-i\omega t + ikz). \quad (2.19)$$

Цель дальнейшего анализа состоит в обосновании замены волнового уравнения (2.11) с током (2.19) упрощенным адиабатическим волновым уравнением (2.17). Такая замена возможна лишь на достаточно большом расстоянии от резонансной точки  $z \gg \left( v_{\parallel} / \frac{d\omega_e}{dz} \right)^{1/2}$  (вне резонансной зоны), когда выполняется условие  $|h_1/2(ih_2)^{1/2}| \gg 1$ . Используя в этой области асимптотическое представление интеграла вероятности

$$W(\xi) \approx \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{\pi}\xi} \left( 1 + \frac{1}{2\xi^2} + \dots \right) & \left( -\frac{\pi}{4} < \arg \xi < \frac{5\pi}{4} \right); \\ \frac{i}{\sqrt{\pi}\xi} \left( 1 + \frac{1}{2\xi^2} + \dots \right) + 2\exp(-\xi^2) & \left( -\frac{3\pi}{4} < \arg \xi < -\frac{\pi}{4} \right), \end{cases} \quad (2.20)$$

получаем

$$j_{-} = [e^2 n_0 / (2\pi)^{1/2} m_e] \int dv_{\parallel} f_0(v_{\parallel}) \int dk E_{-}(k) \{i/h_1 + \zeta(\operatorname{sgn} v_{\parallel}, \arg z)\} \times \\ \times (\pi/i h_2)^{1/2} \exp(i h_1^2 / 4 h_2) \} \exp(-i\omega t + ikz). \quad (2.21)$$

Здесь  $\zeta(\operatorname{sgn} v_{\parallel}, \arg z) = 1$  для  $v_{\parallel} < 0$  при  $\pi \leq \arg z \leq 3\pi/2$  и для  $v_{\parallel} > 0$  при  $3\pi/2 \leq \arg z \leq 2\pi$ .

Вне этих секторов  $\zeta(\operatorname{sgn} v_{\parallel}, \arg z) = 0$ . Для определенности рассматривается случай спадающего магнитного поля ( $d\omega_e/dz < 0$ ).

Нетрудно установить соответствие между (2.21) и последним, «токовым» слагаемым в левой части (2.12). Так, если в (2.12)

считать  $E_{\perp}(z') = \text{const}$  и вычислить интеграл по  $dz'$  асимптотически, то вклад точки  $z' = z$  будет соответствовать первому слагаемому в фигурных скобках (2.21), а вклад точки стационарной фазы ( $z' = 0$ ) — второму. Второе слагаемое, как это следует из пространственной зависимости его фазы [ср. с (2.10)], описывает псевдодолны, возбуждающиеся в резонансной точке. Выше уже отмечалось, что наличие разброса в скоростях псевдодолн должно привести к их взаимному уничтожению на достаточно большом расстоянии от резонансной точки. Для того чтобы найти

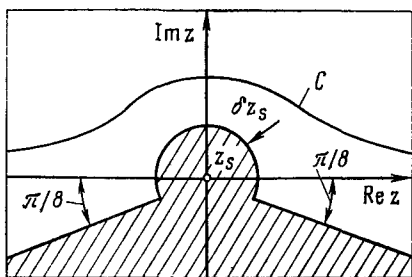


Рис. 2.6. Плоскость комплексного переменного  $z$  в окрестности резонансной точки:

область, в которой неприменимо упрощенное адиабатическое волновое уравнение (2.17) заштрихована;  $C$  — контур, по которому следует обходить резонансную точку в соответствии с правилом Ландау;  $\delta z_s = (\rho_e L)^{1/2}$

область, в которой можно пренебречь вторым слагаемым в (2.21), необходимо проанализировать зависимость интеграла

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} (dv_{\parallel} \sqrt{v_{\parallel}}) \exp(i h_1^2 / 4 h_2) f_0(v_{\parallel}) \quad (2.22)$$

от координаты  $z (h_1 = \omega - \omega_e(z) - kv_{\parallel}; \omega_e(z) = \omega + (z - z_s) d\omega_e/dz)$ .

Если выполняется условие  $|z - z_s| \gg (\rho_e L)^{1/2}$ , где  $L = \left| \frac{1}{\omega} \frac{d\omega_e}{dz} \right|^{-1}_{z=z_s}$ ,

то интеграл (2.22) может быть вычислен методом перевала:

$$J \approx \left( 6 \left| \frac{d\omega_e}{dz} \right| \right)^{-1/6} (3v_{Te}(z - z_s))^{-1/3} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i\pi}{12} - \frac{3}{2^{3/4}} \exp \left( -\frac{i\pi}{3} \right) \frac{(z - z_s)^{4/3}}{v_{Te}^{2/3}} \left| \frac{d\omega_e}{dz} \right|^{2/3} \right\}.$$

Из последнего выражения следует, что вне сектора  $-(7\pi/8) \arg(z - z_s) < -\pi/8$  (рис. 2.6) интеграл  $J$  становится экспоненциально малым на расстояниях порядка  $(\rho_e L)^{1/2}$  от резонансной точки, т. е. практически сразу вне резонансной зоны. Однако в секторе  $-(7\pi/8) < \arg(z - z_s) < \pi/8$  интеграл не убывает, а растет с увеличением  $|z - z_s|$ . Этот результат означает, что можно пренебречь вторым слагаемым в фигурных скобках, если при нахождении решения волнового уравнения обходить резонансную точку  $z_s$  на достаточно большом расстоянии в верхней полуплоскости комплексного переменного  $z$ . Поскольку в нашем случае  $d\omega_e/dz < 0$ , то правило обхода совпадает с правилом обхода Ландау. В резонансный знаменатель входит разность  $\omega - \omega_e(z)$ ,

поэтому смещение в верхнюю полуплоскость эквивалентно переходу к нарастающим колебаниям. То обстоятельство, что при этом пропадают эффекты, связанные с псевдоволнами, вполне естественно. Действительно, само существование псевдоволн обусловлено фазовой памятью электронов, которые, двигаясь вдоль магнитного поля, переносят информацию о поле волны в резонансной точке. Однако если амплитуда колебаний возрастает с инкрементом  $\gamma$ , то на состояние электронов в данный момент времени влияют электромагнитные поля, отделенные временным интервалом, не превышающим по порядку  $\gamma^{-1}$ . Иными словами, в случае нарастающих колебаний фазовая память частиц охватывает интервал времени порядка  $\gamma^{-1}$ . Если этот интервал мал по сравнению с временем прохождения электрона через резонансную зону  $\delta t \approx |v_{\parallel} d\omega_e/dz|^{-1/2}$ , то эффекты фазовой памяти станут несущественными и при анализе распространения электромагнитных колебаний можно использовать локальное приближение, в котором неоднородность магнитного поля учитывается параметрически. Очевидно, что соответствующее смещение в верхнюю полуплоскость по порядку равно размеру резонансной зоны.

Если в фигурных скобках в (2.21) оставить лишь первое слагаемое, то выражение для  $j_-$  примет такой же вид, как и в случае однородного магнитного поля, при этом зависимость магнитного поля от координат будет учитываться параметрически:

$$j_- = \frac{V \pi e^2 n_0}{m_e k v_{Te}} \int dk_{\parallel} E_-(k_{\parallel}) W \left( \frac{\omega - \omega_e(z)}{k_{\parallel} v_{Te}} \right) \exp(-i \omega t + i k_{\parallel} z). \quad (2.23)$$

Предположим теперь, что радиус обхода превышает также  $k_{\parallel} L \omega / v_{Te}$ .

В этом случае для интеграла вероятности в (2.23) может быть использовано асимптотическое представление (2.20). Если на контуре обхода по Ландау в асимптотике интеграла вероятности оставить лишь наибольшее слагаемое, то получим выражение

$$j_- = \frac{i e^2 n_0}{m_e} \frac{1}{\omega - \omega_e(z)} E_-(z, t), \quad (2.24)$$

которое входит в адиабатическое волновое уравнение, полученное в гидродинамическом приближении (2.17).

Анализ возможности использования адиабатического волнового уравнения, дополненного правилом обхода Ландау, мы провели на простейшем примере необыкновенных колебаний, распространяющихся вдоль магнитного поля, причем считали  $\nabla B_0 \parallel \mathbf{B}_0$ . Однако этот анализ может быть без труда обобщен на случай колебаний произвольного типа [98]. Угол между  $\nabla B_0$  и  $\mathbf{B}_0$  также может быть произвольным, однако он должен отличаться от  $\pi/2$ . Если  $\nabla B_0 \perp \mathbf{B}_0$ , то каждый из электронов движется в однородном магнитном поле, и поэтому нелокальные эффекты, проявляющиеся, в частности, в возбуждении псевдоволн, отсутствуют. В этом случае использование правила обхода Ландау эквивалентно ис-

пользованию линейного приближения при описании резонансного взаимодействия электромагнитных колебаний с заряженными частицами. Можно показать, что для этого, как и в случае одно-родной немагнитной плазмы (см. п. 2.1.1), частота кулоновских соударений должна быть достаточно велика.

Использование адиабатических волновых уравнений для описания резонансного циклотронного взаимодействия может вызвать сомнения. Действительно, адиабатические волновые уравнения справедливы лишь на достаточно большом расстоянии от резонансной точки и на первый взгляд не содержат в себе никакой информации о процессах, происходящих в ее окрестности. Именно поэтому мнимость, указывающая на процесс поглощения колебаний, появляется в адиабатических волновых уравнениях лишь при переходе к комплексным значениям координаты. Однако на самом деле разделение процесса взаимодействия частиц с колебаниями на адиабатическую и резонансную части в значительной степени условно и соответствует выделению в асимптотике функции  $W$  [см. (2.20)] мнимой и действительной частей. Между тем лишь их совокупность образует единую аналитическую функцию. Следовательно, каждая из них содержит информацию о другой части. Именно по этой причине во всех случаях, когда удавалось провести расчеты двумя способами (непосредственно анализируя резонансное взаимодействие и используя адиабатическое волновое уравнение, дополненное правилом обхода Ландау, см. п. 2.2.1), получаются одинаковые результаты.

В заключение остановимся на условиях, использованных выше при обосновании правила обхода Ландау.

1. Предполагалось, что каждый электрон проходит через резонансную зону лишь один раз. Это предположение справедливо для неограниченных систем. В системах конечного размера электрон совершает возвратно-поступательное движение, многократно проходя через резонансную зону. В гл. 3 показано, что предысторией движения электрона можно пренебречь, если случайные воздействия (кулоновские соударения, нестабильность фазы электромагнитного поля, отражающая некогерентность спектра циклотронных колебаний) уничтожают фазовую память электрона. При отсутствии же случайных воздействий амплитуда монохроматических циклотронных колебаний должна быть достаточно велика. Если ни одно из этих условий не выполняется, то резонансное взаимодействие ослабляется. Этот эффект может быть учтен в адиабатическом волновом уравнении посредством модификации правила обхода Ландау (см. приложение П.2).

2. В настоящем рассмотрении принималось, что вдоль линий магнитного поля электроны движутся с постоянной скоростью. В силу малого размера резонансной зоны это предположение хорошо выполняется для большинства электронов в случае распределений с достаточно большим разбросом по  $v_{\parallel}$ . Однако оно заведомо нарушается для небольшой доли электронов, останавливающихся в пределах резонансной зоны. В приложении П.3 най-



дено, что при выполнении естественного условия  $v^2_{Te} \gg a \delta z_s$  ( $a$  — ускорение) наличие таких электронов не влияет на результаты анализа резонансного взаимодействия.

3. Наконец, весьма существенно предположение о монотонном изменении магнитного поля. В 2.3 показано, что в окрестности экстремумов магнитного поля использование правила обхода Ландау незаконно.

## 2.2. Циклотронные колебания в монотонно меняющемся магнитном поле

2.2.1. Циклотронные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля ( $\theta=0$ ), при  $\nabla B_0 \parallel B_0$ . Формулы Баддена. Колебания, падающие на область циклотронного резонанса, проходят через нее не полностью — часть энергии поглощается и часть отражается. Определение коэффициентов поглощения и отражения колебаний является целью настоящего подраздела. Рассмотрим начнем с простейшего случая необыкновенных колебаний с частотой  $\omega \approx \omega_e$ , распространяющихся вдоль магнитного поля, градиент которого параллелен  $B_0$  [1]. Адиабатическое волновое уравнение для этого случая приведено в п. 2.1.3, см. (2.17). Предполагая, что магнитное поле меняется по линейному закону  $B_0(z) = B_0(1 - z/L)$ , приведем уравнение (2.17) к уравнению Уиттекера:

$$E''_{-} - (1/4 + i\Gamma/2\pi z_1) E_{-} = 0,$$

где  $z_1 = -2zi\omega/c$ ;  $\Gamma = \pi\omega^2_{pe}L/\omega c$ . Точка циклотронного резонанса является регулярной особой точкой этого уравнения.

Рассмотрим сначала колебания, распространяющиеся со стороны большего магнитного поля, т. е. со стороны  $z < 0$ . Очевидно, что в области  $z \rightarrow \infty$  имеется лишь волна, бегущая направо. Она описывается следующим решением уравнения Уиттекера [100]:

$$E_{-} = \text{const } W_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(z_1) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} (2\omega c/z)^{-i\Gamma/2\pi} \exp(i\omega z/c). \quad (2.25)$$

Продолжая его справа налево в соответствии с правилом обхода Ландау, т. е. через верхнюю полуплоскость (см. рис. 2.6), находим, что в области  $z < 0$  это решение также описывает волну, бегущую направо, а отраженная волна отсутствует:

$$E \underset{z \rightarrow -\infty}{\approx} \left( \frac{2\omega |z|}{c} \right)^{-i\Gamma/2\pi} \exp(\Gamma/2 + zi\omega/c). \quad (2.26)$$

Из сопоставления (2.25) и (2.26) следует, что коэффициент прохождения колебаний по мощности через область циклотронного резонанса

$$\xi = \exp(-\Gamma). \quad (2.27)$$

В данном случае отраженная волна отсутствует, поэтому коэффициент поглощения дается выражением  $\eta = 1 - \exp(-\Gamma)$ . Оно

совпадает с выражением (2.16), полученным при рассмотрении резонансного взаимодействия необыкновенных колебаний с моноэнергетическим пучком электронов. В последнем случае циклотронное поглощение имело вид трансформации в коротковолновые колебания, описывающие псевдоволну, уходящую от резонансной точки вместе с потоком электронов. Совпадение коэффициентов поглощения подтверждает соображения, высказанные в п. 2.1.3, о возможности использования адиабатического волнового уравнения для анализа резонансного циклотронного взаимодействия.

Решение, описывающее волну, распространяющуюся со стороны меньшего магнитного поля, дается выражением [100]

$$E_- = M_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(z_1) + \frac{\exp(-\Gamma/2)}{(-i\Gamma/2\pi)!} W_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(z_1) \approx$$

$$\approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(\frac{2\omega}{c}z\right)^{i\Gamma/2\pi}}{\left(\frac{i\Gamma}{2\pi}\right)!} \exp\left(-\frac{i\omega}{c}z + \frac{\Gamma}{4}\right) + \\ + \frac{\left(\frac{2\omega}{c}z\right)^{-i\Gamma/2\pi}}{\left(-\frac{i\Gamma}{2\pi}\right)!} \left[\exp\left(-\frac{\Gamma}{2}\right) - \exp\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\right] \exp\left(\frac{i\omega}{c}z - \frac{\Gamma}{4}\right), z > 0; \\ \frac{\left(\frac{2\omega}{c}|z|\right)^{i\Gamma/2\pi}}{\left(\frac{i\Gamma}{2\pi}\right)!} \exp\left(-\frac{i\omega}{c}z - \frac{\Gamma}{4}\right), z < 0. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Сравнивая амплитуду падающей волны с амплитудами прошедшей и отраженной волн, находим, что коэффициент прохождения, как и выше, дается выражением (2.27), а коэффициенты отражения и поглощения

$$\xi = [1 - \exp(-\Gamma)]^2; \quad (2.29)$$

$$\eta = 1 - \xi - \zeta = \exp(-\Gamma) [1 - \exp(-\Gamma)]. \quad (2.30)$$

При  $\Gamma \ll 1$  (низкая плотность, большие градиенты магнитного поля) плазма практически одинаково взаимодействует с колебаниями, распространяющимися в противоположных направлениях. В этом случае с точностью до значений порядка  $\Gamma$  имеем  $\xi \approx 0$ ,  $\eta \approx \Gamma$ . В то же время при  $\Gamma \gg 1$  колебания, падающие со стороны большего магнитного поля, почти целиком поглощаются, а со стороны меньшего отражаются. Причина различия становится понятной, если воспользоваться аналогией между квантово-механическим уравнением Шредингера и адиабатическим волновым уравнением (2.17). В последнем величина  $W_0 = (\omega/c)^2$  играет роль энергии частицы, движущейся в «потенциале»  $U(z) = = \omega_{pe}^2 \omega / c^2 [\omega - \omega_e(z)]$  (рис. 2.7, 2.8). Из рисунков следует, что

области распространения колебаний (области прозрачности) разделены потенциальным барьером ( $z_S < z < z_r$ ). Здесь  $z_r$  — обычная точка поворота, в которой обращается в нуль «кинетическая энергия» [ $W_0 = U(z_r)$ ];  $z_S$  — сингулярная точка поворота (точка циклотронного резонанса), в которой «потенциальная энергия» бесконечна.

Колебания, распространяющиеся со стороны большего магнитного поля, сначала попадают на точку циклотронного резонанса, где частично поглощаются. Остальная часть энергии «просачивается» под барьером непрозрачности в область  $z > z_r$ .

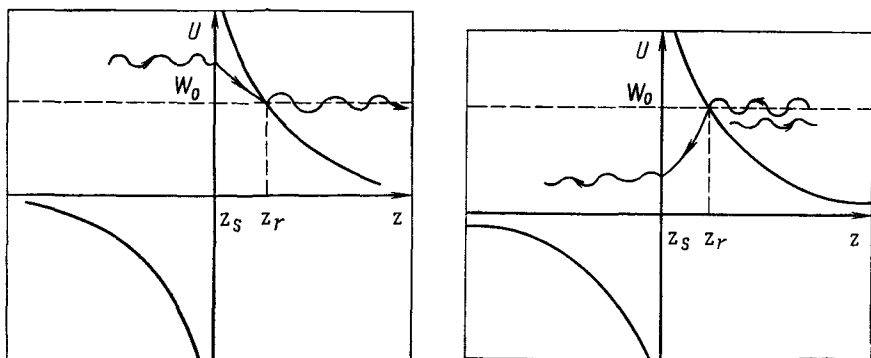


Рис. 2.7. Распространение колебаний со стороны большего магнитного поля:

в области прозрачности, где колебания имеют вид бегущих волн, они схематически изображены волнистой линией;  $U(z) = \omega \omega_p e^2 / c^2 (\omega - \omega_e(z))$  — потенциальная энергия в уравнении Шредингера, эквивалентном (2.17);  $W_0 = (\omega/c)^2$  — полная энергия;  $z_S$  — сингулярная точка поворота (резонансная точка);  $z_r$  — обычная точка поворота

Рис. 2.8. Распространение колебаний со стороны меньшего магнитного поля (обозначения те же, что на рис. 2.7)

Колебания, распространяющиеся со стороны меньшего поля, сначала попадают на обычную точку поворота, от которой частично отражаются. К точке циклотронного резонанса проникает лишь часть энергии колебаний. В результате в выражении для коэффициента поглощения появляется малый множитель  $\xi$  [ср. с (2.6)]. Таким образом, для эффективного поглощения колебаний необходимо, чтобы между излучателем и точкой циклотронного резонанса индукция магнитного поля уменьшалась. Область спадающего магнитного поля в [3] названа магнитным берегом. Это название подчеркивает сходство между распространением электромагнитных колебаний, приближающихся к точке циклотронного резонанса со стороны меньшего магнитного поля при  $\Gamma \gg 1$ , и волнами на поверхности воды, набегающими на отлогий берег. В обоих случаях длина волны колебаний уменьшается по мере их распространения, пока не происходит практически полного, безотражательного поглощения. Отметим, что в [3] анализировалось ионное циклотронное поглощение альфвеновских колебаний. Из рис. 2.8 следует, что их область прозрачности, так же

как и область прозрачности необыкновенных колебаний, подходит к циклотронному резонансу со стороны большего магнитного поля.

В задачах, характерных для квантовой механики, безотражательное прохождение частиц через неоднородности потенциала возможно лишь в том случае, когда потенциал образует яму, а энергия частицы принимает одно из дискретного набора «собственных» значений [101]. В рассматриваемом случае ни одно из этих условий не выполняется. Действительно, изменение частоты колебаний [величина  $(\omega/c)^2$  играет роль энергии частицы] не влияет на вывод о безотражательном прохождении колебаний, а эффективный потенциал образует барьер (область непрозрачности). Отличия от квантово-механических задач обусловлены использованием правила обхода Ландау при анализе адиабатического волнового уравнения (2.17). В окрестности резонансной точки  $z_S$  это уравнение можно привести к виду

$$E'' - \frac{\omega_{pe}^2 L}{c^2(z - z_S)} E_- = 0. \quad (2.31)$$

Здесь опущено слагаемое  $(\omega/c)^2 E_-$ , которое несущественно при  $z \approx z_S$ .

Квазиклассическое решение, описывающее колебания, амплитуда которых спадает в глубь области непрозрачности ( $z > z_S$ ), дается выражением

$$E_- \approx (z - z_S)^{-1/4} \exp\{-2(\omega_{pe}/c)[L(z - z_S)]^{1/2}\}.$$

При продолжении этого решения в область  $z < z_S$  в соответствии с правилом обхода Ландау, т. е. над резонансной точкой,  $\arg(z - z_S)$  получает приращение  $\pi$ . Следовательно, в области  $z < z_S$  будем иметь волну, бегущую налево:

$$E_- \approx (z - z_S)^{-1/4} \exp[-2i(\omega_{pe}/c)(L|z - z_S|)^{1/2}].$$

Напомним, что временная зависимость колебаний выбрана в виде  $\exp(-i\omega t)$ . Если бы при продолжении решения через точку  $z_S$  она обходилась снизу (по правилу, обратному обхода Ландау), то в области  $z < z_S$  была бы волна, убегаящая от резонансной точки:

$$E_- \approx (z - z_S)^{-1/4} \exp[2i(\omega_{pe}/c)(L|z - z_S|)^{1/2}],$$

т. е. не поглощение, а излучение колебаний резонансной точкой.

При продолжении решения через обычную точку поворота правильный результат можно иногда получить, используя сумму выражений, полученных обходом с противоположных сторон. Такой способ продолжения решения в данном случае давал бы в области перед точкой поворота стоячую волну, составленную из падающей и отраженной волн равной амплитуды, т. е. привел бы к выводу об отсутствии поглощения. Заметим, что равенство амплитуд падающей и отраженной волн обусловлено использованием приближенного волнового уравнения (2.31), не содержащего области прозрачности справа от резонансной точки.

В эту область просачивается часть энергии падающей волны, поэтому даже при отсутствии поглощения амплитуда падающей волны должна превышать амплитуду отраженной [см. (2.28)].

После соответствующего переопределения величины  $\Gamma$  формулы Баддена можно использовать при произвольной монотонной зависимости индукции магнитного поля от координаты, если распространение колебаний по-прежнему описывать адиабатическим волновым уравнением (2.17). [Законность использования в этом случае самого уравнения (2.17) обсуждается ниже.] Действительно, рассмотрим сначала колебания, падающие со стороны большего поля. Вывод об отсутствии отражения от резонансной точки обусловлен использованием правила обхода Ландау и остается неизменным при любой зависимости  $B_0(z)$ . Что касается коэффициента прохождения колебаний через область непрозрачности, то выражение (2.27) с

$$\Gamma = 2 \int_{z_s}^z dz |k(z)| \quad (2.32)$$

следует из самых общих соображений. Используя (2.32) и равенство  $\eta = 1 - \xi$ , получаем коэффициент поглощения (2.16).

Теперь обратимся к колебаниям, распространяющимся со стороны меньшего поля. В соответствии с теоремой взаимности (см. приложение П.4) коэффициент прохождения  $\xi$  не зависит от направления распространения колебаний. Поскольку в данном слу-

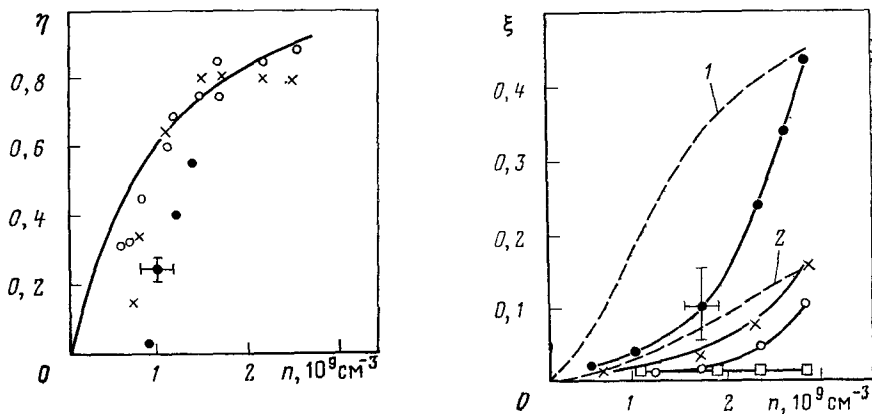


Рис. 2.9. Зависимость коэффициента поглощения  $\eta$  от концентрации плазмы:

волна распространяется со стороны большего магнитного поля;  $L=50$  см; ● — ВЧ-разряд в Кг при давлении газа  $6,6 \cdot 10^{-1}$  Па ( $5 \cdot 10^{-3}$  мм рт. ст.); ○ — разряд постоянного тока в Аг, давление 20 Па ( $1,5 \cdot 10^{-1}$  мм рт. ст.); × — ВЧ-разряд в Аг, давление 0,67 Па ( $5 \cdot 10^{-3}$  мм рт. ст.); — — — — расчет по формуле Баддена с учетом конечного значения частоты соударений электронов с нейтралями.

Рис. 2.10. Зависимость коэффициента отражения  $\xi$  от концентрации плазмы:

ВЧ-разряд в Аг при давлении газа  $6,6 \cdot 10^{-1}$  Па ( $5 \cdot 10^{-3}$  мм рт. ст.); — — — — расчет по формулам Баддена с учетом соударений электрон — нейтрал; 1 —  $L=50$  см; 2 —  $L=12$  см; ● — волна распространяется со стороны меньшего поля при  $L=50$  и 12 см соответственно; ○ и □ — волна распространяется со стороны большего поля при  $L=50$  и 12 см соответственно

чае по сравнению с предыдущим амплитуда колебаний в окрестности резонансной точки падает в  $\exp(\Gamma/2)$  раз, то в коэффициенте поглощения по мощности появляется множитель  $\exp(-\Gamma)$  [см. (2.30)]. Теперь, используя равенство  $\xi = 1 - \eta - \zeta$ , получаем (2.29).

Формулы Баддена проверялись в экспериментах со слабоионизированной плазмой газового разряда [102]. Разрядную трубку помещали в волновод, а в самой трубке создавали магнитное поле, изменяющееся по линейному закону. Измеряли коэффициент прохождения колебаний через зону циклотронного резонанса  $\zeta$  и коэффициент отражения от этой зоны  $\xi$ . Первый из них вполне удовлетворительно согласовался с (2.27). Пример зависимости  $\eta = 1 - \zeta$ , полученной в эксперименте, приведен на рис. 2.9. Вместе с тем при измерениях коэффициента отражения обнаружены заметные расхождения с теорией (рис. 2.10). Ниже показано, что адиабатическое волновое уравнение, вообще говоря, непригодно для определения коэффициента отражения. Возможно, что именно это обстоятельство и обусловило расхождение упрощенной теории, основанной на анализе адиабатического волнового уравнения, с данными эксперимента.

О точности адиабатического волнового уравнения. Чтобы получить упрощенное адиабатическое волновое уравнение (2.17), нам пришлось дважды использовать асимптотику интеграла вероятности.

В первый раз разложение шло по параметру  $2 \left( v_{\parallel} \frac{d\omega_e}{dz} \times \times \frac{1}{\omega - \omega_e(z) - k_{\parallel} v_{\parallel}} \right)^2$ , второй — по  $\left( \frac{k_{\parallel} v_{Te}}{\omega - \omega_e(z)} \right)^2$ . С увеличением радиуса обхода резонансной точки дополнительные слагаемые в волновом уравнении можно сделать как угодно малыми. Однако даже такие слагаемые могут оказать весьма существенное влияние на некоторые характеристики решения, а именно амплитуда отраженной волны, вообще говоря, не может быть определена с помощью адиабатического волнового уравнения [103].

Чтобы выяснить причину этой неопределенности, рассмотрим адиабатическое волновое уравнение на таком большом расстоянии от резонансной точки, где и резонансное слагаемое, пропорциональное  $(\omega - \omega_e(z))^{-1}$ , достаточно мало. В этой области уравнение (2.17) может быть заменено уравнением  $E''_{-} + (\omega/c)^2 E_{-} = 0$ , которое описывает световые волны с волновым числом  $k = \omega/c$ . Если резонансное слагаемое учесть в качестве малой поправки, то для волнового числа получим следующее выражение:

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{z - z_S}.$$

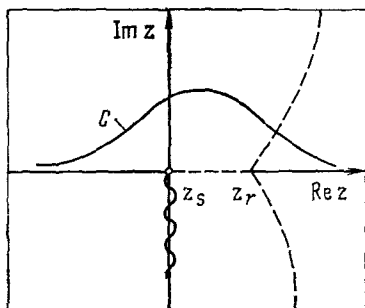
Этому значению волнового вектора соответствуют асимптотики решений

$$E_{-} \approx (z - z_S)^{\mp i\Gamma/2\pi} \exp[(\pm i\omega/c)(z - z_S)]. \quad (2.33)$$

Рассмотрим решение, описывающее волну, падающую со стороны меньшего магнитного поля. На действительной полуоси  $z < z_s$  оно должно иметь вид волны, бегущей налево, т. е. даваться выражением (2.33) с нижними знаками. В верхней полуплоскости, куда мы должны попасть, обхода резонансную точку в соответствии с правилом обхода Ландау (рис. 2.11), экспонента  $\exp[-(i\omega/c)(z-z_s)]$  нарастает\*. Точное решение волнового уравнения отличается от асимптотики (2.33) предэкспоненциальным множителем и экспоненциально малыми слагаемыми  $\sim \exp[(i\omega/c)(z-z_s)]$  [см. (2.33) с верхними знаками], которые,

Рис. 2.11. Плоскость комплексного переменного  $z$  для уравнения (2.17):

----- линии мнимой фазы квазиклассических решений (линии Стокса); ~~~~~ — разрез; C — контур обхода  $z_s$  в соответствии с правилом Ландау



вообще говоря, можно добавить в верхней полуплоскости. Возникновение таких слагаемых в асимптотике решения называют явлением Стокса [104, 105]. Условно это явление привязывают к линиям мнимой фазы квазиклассических решений, выходящим из точек поворота, т. е. в данном случае из точек  $z_r$  и  $z_s$  (рис. 2.11). При переходе из верхней полуплоскости на действительную ось справа от точки  $z_s$  обе экспоненты сравниваются по абсолютному значению. Здесь они описывают падающую и отраженную волны.

Из результатов, полученных выше, следует, что учет в волновом уравнении резонансного слагаемого  $\frac{L}{z-z_s} \left(\frac{\omega_{pe}}{c}\right)^2 E_-$  приводит к коэффициенту отражения (2.29). Однако нельзя гарантировать, что добавление слагаемых вида  $\frac{1}{(z-z_s)^n} E_-$  ( $n \geq 2$ ) не изменит этот результат. Действительно, поскольку  $E_-$  содержит нарастающую экспоненту, то на достаточно большом расстоянии от точки  $z_s$  эти слагаемые превысят спадающую экспоненту, описывающую отраженную волну.

Хотя адиабатическое волновое уравнение непригодно для полного решения задачи о распространении колебаний через область

\* Использование правила обхода Ландау задает направление разреза, который должен выходить из резонансной точки  $z_s$ , являющейся особой точкой уравнения (2.17). В данном случае ( $d\omega_e/dz < 0$ ) он должен быть направлен вниз.

циклотронного резонанса, тем не менее оно позволяет правильно определить ряд их существенных характеристик [103]. С его помощью получают верное значение коэффициента прохождения колебаний через резонансную область (2.27). Оно может быть найдено, например, из (2.33). Так, амплитуда решения, описывающего волну, распространяющуюся со стороны большего магнитного поля [верхний знак в (2.33)], возрастает при обходе точки  $z_S$  справа на  $\exp(\Gamma/2)$ , что соответствует коэффициенту прохождения (2.27). То же самое значение коэффициента прохождения получается и с помощью выражения, дающего волну, падающую на резонансную область со стороны меньшего поля и прошедшую через нее [нижний знак в (2.33)]. Уточнение предэкспоненты, связанное с учетом в адиабатическом волновом уравнении дополнительных слагаемых вида  $\frac{1}{(z-z_S)^n} E_-$ , приводит лишь к малым поправкам в (2.27).

Верным является также вывод об отсутствии отражения при падении колебаний со стороны большего поля. Действительно, соответствующее решение [верхний знак в (2.33)] спадает в верхней полуплоскости. Следовательно, в данном случае изменение асимптотики решения (явление Стокса) невозможно и отраженная волна не возникает.

**Поглощение колебаний в плазме низкой плотности.** Рассмотрение вопроса об описании резонансного взаимодействия в неоднородном магнитном поле с помощью адиабатического волнового уравнения показало, что оно пригодно для вычисления коэффициента прохождения колебаний через область циклотронного резонанса и может приводить к ошибкам в расчетах коэффициента отражения от этой области. Этот вывод был получен при анализе резонансного циклотронного взаимодействия в простейших условиях — предполагалось, что магнитное поле изменяется по линейному закону, а электроны вдоль магнитного поля движутся равномерно. При достаточно низкой плотности плазмы ( $\Gamma \ll 1$ ) резонансное взаимодействие слабо влияет на распространение колебаний. Учитывая его в рамках метода последовательных приближений, можно включить в рассмотрение такие эффекты, как ускорение электронов, нелинейность зависимости  $V_0(\mathbf{r})$  и др. Если  $\eta \approx \Gamma \ll 1$ , то коэффициент отражения  $\xi$  по порядку не превышает  $\eta^2$  [см. (2.29)] и может быть также ниже. Поэтому с точностью до значений порядка  $\eta$  включительно  $\xi = 1 - \eta$ , и, следовательно, для определения  $\xi$  достаточно найти коэффициент поглощения  $\eta$ .

В настоящем разделе, содержание которого повторяет содержание работы [97], правильность результатов, получаемых с помощью адиабатического волнового уравнения, проверяется прямым расчетом количества энергии, поглощаемой при резонансном циклотронном взаимодействии. Первый способ вычисления основан на представлении волнового числа в виде  $k(z) \approx \omega/c + \delta k(z)$ , где малая поправка  $\delta k(z)$  учитывает влияние плазмы на колебания. В результате прохождения через резонансную зону амплитуда колебаний уменьшается на  $\exp(-\Gamma/2)$ , где

$$\Gamma = 2 \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dz \dot{k}(z). \quad (2.34)$$



При достаточно низкой плотности плазмы, когда  $\Gamma \ll 1$ , коэффициент поглощения равен  $\eta \approx \Gamma$ . Если для определения волнового числа использовать уравнение (2.17), а профиль магнитного поля считать линейным, то  $\delta k(z) \approx \omega_{pe}^2 L / 2\omega c (z - z_s)$ , и для  $\Gamma$  получим выражение, использовавшееся выше.

При другом способе вычисления для коэффициента поглощения используется представление

$$\eta = \Delta \varepsilon / S, \quad (2.35)$$

где  $S = (c/4\pi) |E_-|^2$  — поток энергии в плазме низкой плотности;

$$\Delta \varepsilon = n_0 \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) v_{\parallel} \frac{m_e}{2} |\Delta v_{\parallel}|^2 \quad (2.36)$$

— количество энергии, поглощаемое электронами в единицу времени;  $\Delta v_{\parallel}$  — изменение величины  $v_{\parallel} = v_x - i v_y$  для отдельного электрона, вызванное прохождением через зону циклотронного резонанса.

Опять сначала обратимся к простейшему случаю линейно меняющегося магнитного поля. Используя (2.17), (2.8), (2.35), (2.36), получаем, как и выше,  $\eta \approx \Gamma \approx \pi \omega_{pe}^2 L / \omega c$ .

Таким образом, в простейшем случае линейного профиля магнитного поля при равномерном движении электронов вдоль поля описанные выше способы вычисления коэффициента поглощения дают результат, совпадающий с полученным в п. 2.2.1. Теперь проанализируем последовательно влияние на поглощенные ряда эффектов.

Эффект Доплера вызывает смещение резонансных точек для отдельных электронов на  $\delta z \approx k v_{\parallel} |d\omega_e/dz|_{z=z_s}^{-1}$ , где  $z_s$  определяется, как и ранее, равенством  $\omega = \omega_e(z_s)$ . Из способа вычисления  $\Delta v_{\parallel}$  (см. п. 2.1.2) следует, что такое смещение не влияет на  $|\Delta v_{\parallel}|$ , а значит, и  $\eta \sim \Delta \varepsilon \sim |\Delta v_{\parallel}|^2$ . При другом способе вычисления коэффициента поглощения используется величина  $\delta k(z)$ . На достаточно большом расстоянии от резонансной точки  $z_s$  эффект Доплера дает малые поправки:

$$\begin{aligned} \delta k(z) &\approx - \frac{\omega_{pe}^2}{2c} \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) \frac{1}{\omega - \omega_e(z) - k v_{\parallel}} \approx \\ &\approx - \frac{\omega_{pe}^2}{2c (\omega - \omega_e(z))} \left( 1 + \frac{k}{(\omega - \omega_e(z))^2} \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) v_{\parallel} + \dots \right). \end{aligned}$$

Если магнитное поле изменяется по линейному закону, то очевидно, что лишь первое слагаемое в скобках дает вклад в величину  $\Gamma$  [см. (2.34)], при этом для  $\Gamma$  получается то же выражение, что и выше, т. е.  $\Gamma = \pi \omega_{pe}^2 L / \omega c$ .

Точно так же можно показать, что на коэффициент поглощения не влияет релятивистская зависимость циклотронной частоты от энергии электронов.

Учтем теперь одновременно влияние эффекта Доплера и ускорения электронов вдоль магнитного поля. Представим величину  $\delta k(z)$  в виде

$$\delta k(z) = - \frac{\omega_{pe}^2}{2c} \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) \frac{v_{\parallel}}{v_{\parallel}(z)} \frac{1}{\omega - \omega_e(z) - k v_{\parallel}(z)}.$$

Здесь функция распределения электронов отнесена к точке  $z_s$ , определяемой из условия  $\omega = \omega_e(z_s)$ ;  $v_{\parallel}(z) = (v_{\parallel}^2 + 2a(z - z_s))^{1/2}$ ;  $a$  — ускорение; множитель  $v_{\parallel}/v_{\parallel}(z)$  учитывает изменение плотности электронов, вызванное изменением  $v_{\parallel}$ . При вычислении  $\Gamma$  [см. (2.34)] удобно изменить порядок интегрирования.

Интеграл по  $dz$  определяется коэффициентом, стоящим перед резонансным знаменателем  $(z - z'_S)$ , где  $z'_S \approx z_S + L(kv_{\parallel}/\omega) [1 + (kL/\omega)(dv_{\parallel}(z)/dz)]$  находится из условия  $\omega = \omega_e(z'_S) + kv_{\parallel}(z'_S)$ . При линейном профиле магнитного поля этот коэффициент пропорционален множителю

$$\frac{1}{v_{\parallel}(z)(\omega/L - kv'_{\parallel})} \Big|_{z=z'_S} \approx \frac{L}{\omega v_{\parallel}} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{kLa}{\omega v_{\parallel}} \right)^2 \right).$$

Поправка к коэффициенту поглощения, связанная со вторым слагаемым в скобках, равна:

$$\eta' = \eta [1 + (1/2)(kL/\omega)^2 \langle (a/v_{\parallel})^2 \rangle_v]. \quad (2.37)$$

Здесь скобки  $\langle \dots \rangle_v$  означают усреднение по распределению электронов, усреднение оставлено под знаком среднего, так как оно, вообще говоря, может зависеть от скорости. Так, ускорение, обусловленное взаимодействием магнитного момента электрона с неоднородным магнитным полем, равно  $v_{\perp}^2/2L$ . Выражение (2.37) расходится при  $v_{\parallel} \rightarrow 0$ . Расходимость связана с использованием в промежуточных вычислениях разложения  $v_{\parallel}(z) \approx v_{\parallel} + (z - z_S) \frac{dv_{\parallel}}{dz} \Big|_{z=z_S}$ , которое становится несправедливым в окрестности точки остановки, где  $v_{\parallel}(z) = 0$ . Резонансное взаимодействие «останавливающихся» электронов рассмотрено в гл. 3. Здесь же ограничимся установлением эквивалентности различных подходов к вычислению  $\eta$ .

Второй способ вычисления требует нахождения  $\Delta v_{\perp}$ . Эта величина, как следует из расчета по методу стационарной фазы, пропорциональна  $|\Phi'|^{-1/2}_{t=t_S}$ , где  $\Phi(t)$  — разность между фазой циклотронного вращения и фазой волны на траектории электрона [см. (2.9)];  $t_S$  — момент прохождения электрона через резонансную точку. В интересующих нас условиях

$$\Phi(t) = \int_0^t (\omega - \omega_e(z(t'))) dt' - kz(t) = \frac{\omega}{L} \left( z(0)t + \frac{1}{2} v_{\parallel}(0)t^2 + \frac{1}{6} at^3 \right) - k \left( v_{\parallel}(0)t + \frac{1}{2} at^2 \right) + \text{const.}$$

Время  $t_S$  определяется из условия  $\Phi' = 0$ . В результате получаем  $\Phi''|_{t=t_S} = \{[(\omega/L)v_{\parallel}(0)]^2 + (ka)^2\}^{1/2}$ . С помощью последнего выражения приходим к тому же самому результату, что и выше [см. (2.37)].

Отметим, что учет лишь одного ускорения (без эффекта Доплера) приводит к поправкам более высокого порядка по  $a$ :  $\delta\eta \approx - (5/8) \eta L^2 a^4 / \omega^2 v_{\parallel}^6$ .

Теперь найдем поправки к  $\eta$ , обусловленные слабой нелинейностью зависимости  $\omega_e(z)$ . Если адиабатическое волновое уравнение получать из кинетики методом интегрирования по траекториям, то в выражении для  $v_{\perp}$  типа (2.6) необходимо учитывать лишь вклад верхнего предела интегрирования, игнорируя точку стационарной фазы (резонансную). При учете нелинейности в зависимости  $\omega_e(z)$  выражение для  $\Phi(z, t)$  принимает вид

$$\Phi(z, t) = \left( \omega'_e(z - z_S) + \frac{1}{2} \omega_e''(z - z_S)^2 \right) t + (v_{\parallel}/2) (\omega'_e + \omega_e''(z - z_S)) t^2 + (1/6) v_{\parallel}^2 \omega_e''' t^3, \quad (2.38)$$

откуда для переменной части  $v_{\parallel}$ , обусловленной взаимодействием с полем волны, находим

$$\tilde{v}_{\parallel} = i \frac{eE_{\parallel}}{m_e} \frac{L}{\omega(z-z_S)} \left( 1 - \frac{5}{8} v_{\parallel} (\omega_e'')^4 \left( \frac{L}{\omega} \right)^6 + \sum_{n \neq 0} \alpha_n (z-z_S)^n \right). \quad (2.39)$$

Если в последнем выражении не учитывать поправок, связанных с нелинейностью, то, получив затем выражение для плотности тока  $j_{\parallel}$  и подставив его в уравнение Максвелла, пришли бы к адиабатическому волновому уравнению (2.17). Соответственно выражение для  $\delta k(z)$  приняло бы вид  $\delta k(z) \approx \omega_p^2 L / 2\omega c$  (см. выше). Из (2.39) следует, что нелинейность зависимости  $\omega_e(z)$  приводит к эффективной перенормировке  $L \rightarrow L[1 - (5/8)v_{\parallel}(\omega_e'')^4(L/\omega)^6]$ . В результате коэффициент поглощения изменяется на

$$\delta\eta = -(5/8) \eta \langle v_{\parallel}^2 \rangle_{\mathbf{v}} (\omega_e'')^2 (L/\omega)^6. \quad (2.40)$$

При втором способе вычисления коэффициента поглощения в фазе  $\Phi(z, t)$  координату  $z$  следует считать функцией времени  $z = z_S + v_{\parallel} t$ . В результате (2.38) принимает вид

$$\Phi(t) = -(\omega/2L) v_{\parallel} t^2 + (1/6) \omega_e'' v_{\parallel}^2 t^3.$$

При этом измененне скорости электрона  $\Delta v_{\parallel}$ , вызванное прохождением через резонансную точку, равно:

$$\begin{aligned} \Delta v_{\parallel} = & -\frac{eF_{\parallel}}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[i\Phi(t)] \approx -\frac{eE_{\parallel}}{m_e} \left( \frac{2\pi L}{i\omega v_{\parallel}} \right)^{1/2} \times \\ & \times \left( 1 - \frac{5i}{4} v_{\parallel} \left( \frac{L}{\omega} \right)^3 \omega_e''^2 - \frac{11!!!}{273^5} v_{\parallel}^2 \left( \frac{L}{\omega} \right)^6 \omega_e''^4 \right). \end{aligned}$$

Дальнейшие расчеты по формулам (2.35), (2.36) приводят к (2.40). Оба способа вычисления также дают одно и то же значение и для поправки  $\delta\eta$ , связанной с третьей производной магнитного поля:

$$\delta\eta \approx -\frac{\eta}{6} \langle v_{\parallel}^2 \rangle_{\mathbf{v}} \left( \frac{L}{\omega} \right)^4 \omega_e'''.$$

Таким образом, адиабатическое волновое уравнение пригодно для определения коэффициента прохождения колебаний через зону циклотронного резонанса. Учет ряда эффектов, которые могут оказаться существенными в реальных условиях, требует модификации адиабатического волнового уравнения (2.17), полученного для простейших условий. При низкой плотности плазмы коэффициенты поглощения и прохождения связаны соотношением  $\xi = 1 - \eta$ . Это обстоятельство позволило проверить результаты, получаемые с помощью адиабатического волнового уравнения, прямым подсчетом количества энергии, поглощаемой при резонансном взаимодействии.

Отражение колебаний в плазме низкой плотности. Теперь обратимся к вычислению коэффициента отражения, следуя в изложении работе [106]. В плазме низкой плотности ( $\Gamma \ll 1$ ) расчет коэффициента отражения удастся провести с использованием полного волнового уравнения. При его выводе возьмем за основу уравнение (2.12). В нем перейдем от интегрирования по координате к интегрированию по времени  $z(t) = z + v_{\parallel} t + (1/2) a t^2 (v_{\parallel} \gg at)$

н произведем усреднение по функции распределения электронов. В отличие от (2.12) учтем релятивистскую зависимость электронной циклотронной частоты от энергии, считая  $v_{Te} \ll c$ . При этом получаем следующее интегродифференциальное волновое уравнение:

$$E'_- + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_- + i \frac{\omega \omega_{pe}^2}{c^2} \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) \int_{-\infty}^0 dt E_-(z(t)) \times \\ \times \exp[i\Phi(z, t)] = 0,$$

где

$$\Phi(z, t) = \omega t \left( -\frac{z-z_S}{L} + \frac{v_{\parallel}}{c} - \frac{v^2}{2c^2} \right) + \frac{\omega t^3}{2L} \left( \frac{aL}{c} - v_{\parallel} \right) - \\ - \frac{a\omega t^3}{6L}, \quad \omega_e(z) = \omega \left( 1 - \frac{z}{L} \right).$$

При низкой плотности плазмы интегральное слагаемое может учитываться как малая поправка. В нулевом приближении, пренебрегая этим слагаемым, получаем  $E_-^{(0)}(z) = \exp\left(\pm i \frac{\omega}{c} z\right)$ , где верхний (нижний) знак в показателе экспоненты соответствует волне, распространяющейся со стороны большего (меньшего) магнитного поля ( $d\omega_e/dz < 0$ ). Поправка к решению первого порядка по плотности имеет вид

$$E_-^{(1)}(z) = -\frac{\omega \omega_{pe}^2}{2c^2} \left\{ \exp\left(i \frac{\omega}{c} z\right) \int_{-\infty}^z dz_1 \exp\left(-i \frac{\omega}{c} z_1\right) \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) \times \right. \\ \times \int_{-\infty}^0 dt E_-^{(0)}(z_1(t)) \exp[i\Phi(t, z_1)] + \exp\left(-i \frac{\omega}{c} z\right) \int_z^{\infty} dz_1 \times \\ \left. \times \exp\left(i \frac{\omega}{c} z_1\right) \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) \int_{-\infty}^0 dt E_-^{(0)}(z_1(t)) \exp[i\Phi(t, z)] \right\}. \quad (2.41)$$

Проанализируем отражение колебаний, распространяющихся со стороны меньшего магнитного поля. В этом случае отраженная волна дается первым слагаемым в (2.41). Ее амплитуда при  $z \rightarrow \infty$  равна:

$$E_-^{(отр)} = -\frac{\omega \omega_{pe}^2}{2c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \left( \exp - 2i \frac{\omega}{c} z_1 \right) \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) \times \\ \times \int_{-\infty}^0 dt \exp \left[ i \frac{z_1}{L} \omega t + i \omega t \left( v_{\parallel} - v^2/2c^2 \right) + \right. \\ \left. + (i\omega t^2/2L) \left( aL/c - v_{\parallel} \right) - a\omega t^3/6L \right]. \quad (2.42)$$

Поменяем в (2.42) порядок интегрирования. Интеграл по  $dz_1$  дает  $\delta(t+2L/c)$ , что позволяет проинтегрировать по  $dt$ , после чего интеграл по  $d\mathbf{v}$  также без

труда вычисляется. (Распределение электронов по скоростям считаем максвелловским.) В результате получаем

$$E_{-(\text{отр})} = \Gamma(1 - 2i\beta_e^2 \omega L/c)^{-1/2}.$$

Выражение (2.41) дает амплитуду падающей волны, отличную от 1. С учетом этого отличия коэффициент отражения оказывается равным:

$$\xi = \Gamma^2 (1 + 4(\beta_e^2 \omega L/c)^2)^{-1/2} (1 + (16/9)(\beta_e^2 \omega L/c)^2)^{-2}. \quad (2.43)$$

В пренебрежении релятивистскими эффектами последнее выражение совпадает с выражением (2.29), взятым при  $\Gamma \ll 1$ . Учет релятивизма в адиабатическом волновом уравнении привел бы к появлению в нем малого слагаемого

$(1/2) [\omega \omega_{pe}/c^2 (\omega - \omega_e(z))]^2 \int dv v^2 f_0(v) E_-$ . Можно показать, что в соответствии с соображениями, высказанными выше, анализ модифицированного адиабатического уравнения дает неверный результат, отличный от (2.43).

Заметим, что в случае волны, распространяющейся со стороны большего магнитного поля, интегрирование по  $dz_1$  в выражении, аналогичном (2.42), дало бы  $\delta(t - 2L/c)$ . Интеграл по времени берется по области  $t < 0$ . Ввиду наличия  $\delta$ -функции подынтегральное выражение в этой области тождественно равно 0. Таким образом, приходим к заключению, что колебания, падающие со стороны большего магнитного поля, проходят через резонанс без отражения.

Теперь обратимся к интерпретации полученных результатов. При низкой плотности плазмы процесс отражения отличается значительным своеобразием. Решение волнового уравнения методом последовательных приближений выявляет характерные особенности этого процесса. При учете эффекта Доплера для волны, распространяющейся справа [со стороны меньшего магнитного поля  $\sim \exp(-i\omega t - z i \omega/c)$ ], резонансное условие выполняется в точке  $z'_s = z_s - v_{\parallel} L/c$ . В этой точке возбуждается псевдоволна с фазой

$$\Phi_p(z, t) = -\omega t - (\omega/c)(z - z'_s) + (\omega/v_{\parallel} L)(z - z'_s)^2. \quad (2.44)$$

Здесь для простоты рассуждений пока не учитывается релятивизм и считается, что электроны движутся вдоль магнитного поля равномерно.

Волновое число псевдоволны  $k_p = d\Phi_p/dz = -\omega/c + (\omega/v_{\parallel} L)(z - z'_s)$ . В точке  $z''_s = z'_s + 2v_{\parallel} L/c$  оно совпадает с волновым числом отраженных колебаний  $k = \omega/c$ . В этой точке псевдоволна излучает отраженную волну (трансформируется в нее). Заметим, что если первичная волна распространяется со стороны меньшего магнитного поля, то вне зависимости от знака скорости электроны проходят сначала через резонансную точку  $z'_s$ , а затем через точку «трансформации»  $z''_s$ . Последовательность прохождения обращается, когда первичная волна распространяется в противоположном направлении. Естественно, что в этом случае отражение отсутствует.

Описанный процесс отражения аналогичен явлениям некогерентного отражения [91] и просветления волновых барьеров [92, 93] (см. также п. 2.1.1).

Рассмотрим теперь, как на отражение циклотронных колебаний влияет ряд факторов, которые могут оказаться существенными в реальных условиях. Прежде всего отметим, что наличие теплового разброса по продольным скоростям не сказывается на отражении. Действительно, подставляя в (2.44) координату точки, в которой происходит излучение отраженной волны  $z_s'' = z_s' + 2v_{\parallel} L/c$ , находим, что все псевдоволны приходят в соответствующие точки  $z_s''$  сфазированными  $\Phi(z_s'', t) = -\omega t$ . В результате отраженная волна излучается когерентно-синхронно. Синхронизм нарушается, например, под влиянием релятивизма. Нетрудно показать, что при учете релятивизма фазы парциальных отраженных волн зависят от энергии электронов  $\Phi(z_s'', t) = -\omega t + kL v_{\parallel}^2/c^2$ . Их интерференция приводит к уменьшению амплитуды отраженной волны, см. (2.19).

Отражение уменьшается также и в том случае, если профиль магнитного поля отличается от линейного:

$$\xi = \Gamma^2 \left( 1 + 4 \left( \beta_e^2 \frac{\omega L}{c} \right)^2 \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\omega_e'' L^2}{\omega} \right)^2 \right)^{-1/2} \times \\ \times \left( 1 + \frac{16}{9} \left( \beta_e^2 \frac{\omega L}{c} \right)^2 \right)^{-2}.$$

**2.2.2. Циклотронные колебания с  $k_{\perp} \neq 0$  при  $\nabla B_0 \parallel \mathbf{B}_0$  (обобщение формул Баддена).** В случае циклотронных колебаний, распространяющихся вдоль магнитного поля (см. п. 2.2.1), неоднородность последнего ослабляет резонансное взаимодействие, поскольку именно этот фактор ограничивает размер резонансной зоны. Если у колебаний имеется компонента волнового вектора, перпендикулярная  $\mathbf{B}_0$ , то воздействие градиента  $B_0$ , параллельного  $\mathbf{B}_0$ , прямо противоположно. Дело в том, что колебания с  $\omega = \omega_e$ , распространяющиеся под углом к однородному магнитному полю, не взаимодействуют с электронами (резонансно) (см. п. 1.2.2). Покажем, что если магнитное поле неоднородно и  $\nabla B_0 \parallel \mathbf{B}_0$ , то резонансное взаимодействие появляется, причем его интенсивность сравнима со случаем  $k_{\perp} = 0$ .

Колебания с  $k_{\perp} \neq 0$  при  $\nabla B_0 \parallel \mathbf{B}_0$  рассматривались в работах [107, 108], где получены аналогичные результаты. Первой из этих работ будем следовать в настоящем изложении. Распространение колебаний будем описывать адиабатическим волновым уравнением, полученным в приближении холодной плазмы. Необходимые выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости в области частот  $\omega \approx \omega_e$  приведены в п. 1.2.1. При  $k_{\perp} \neq 0$  все три составляющие электрического поля колебаний вообще говоря отличны от 0. Составляющую  $E_{\parallel}$  удобно выразить через  $E_x$  (или  $E_-$  и  $E_+$ ) из  $z$ -компоненты волнового уравнения (1.24) [см. также (1.25)]. После этого две остальные компоненты волнового уравнения можно представить в следующем ком-

нактном виде:

$$E''_- + a_- E_- + a_0 E_* = 0; \quad (2.45)$$

$$E''_* + a_* E_* + a_0 E_- = 0, \quad (2.46)$$

где  $E_* = \frac{1}{p_*} E_x + i E_y; \quad p_* = (1 - q_e - N_{\perp}^2)/(1 - q_e);$

$$a_- = q_e(1 + p_*)/(\Omega_e^2 - 1) + p_* + [q_e/(1 + p_*)][1 - p_* + 2p_*/(1 + \Omega_e)];$$

$$a_* = p_* + [q_e p_*/(1 + p_*)][1 - p_* + 2/(1 + \Omega_e)];$$

$$a_0 = -q_e p_* (1 - p_*) \Omega_e / (1 + p_*) (1 + \Omega_e); \quad \Omega_e = \omega_e(Z)/\omega; \quad Z = \omega z/c$$

штрих означает дифференцирование по  $Z$ .

При  $k_{\perp} = 0$  ( $p_* = 1$ ) коэффициент  $a_0$  обращается в 0 и система (2.45), (2.46) распадается на два несвязанных уравнения, описывающих независимо распространение необыкновенных и обыкновенных колебаний соответственно. Покажем, что и при  $k_{\perp} \neq 0$  взаимодействием колебаний можно пренебречь.

Характерная длина волны обоих типов колебаний по порядку не превышает  $c/\omega$ . Эта величина обычно мала по сравнению с масштабом изменения магнитного поля, поэтому распространение колебаний может быть описано в рамках квазиклассического приближения. Для продольной компоненты волнового вектора из (2.45), (2.46) получаем следующие выражения:

$$\left(k_{\parallel}^{(\text{ex})}\right)^2 = (1/2)(a_- + a_* \pm ((a_- - a_*)^2 + 4a_0^2)^{1/2}).$$

В точке, где  $k_{\parallel}^{(\text{ex})} = k_{\parallel}^{(\text{or})}$  (подчеркнутое выражение обращается в 0)

происходит взаимная трансформация колебаний. Нетрудно видеть, что в данном случае эта точка смещена от действительной оси на расстояние порядка  $L$ . Поэтому коэффициент трансформации должен быть экспоненциально мал  $[\sim \exp(-k_{\parallel} L)]$  [109]. Фактически в рассматриваемом случае трансформация происходит не в одной точке, а на расстоянии порядка  $L$ , и интерференция гасит появляющиеся при этом колебания. Ниже показано, что резонансное циклотронное взаимодействие оказывает гораздо более существенное воздействие на колебания. Ограничиваясь задачей его изучения, будем игнорировать явление трансформации и считать, что колебания разных типов распространяются независимо.

На меньших расстояниях от резонансной точки  $|z - z_S| \ll L$  выполняется условие  $a_- \gg a_*$ ,  $a_0$ , и для  $k_{\parallel}^2$  можно использовать приближенные выражения

$$(k_{\parallel}^{(\text{ex})})^2 \approx a_- + a_0^2/(a_- - a_*); \quad (k_{\parallel}^{(\text{or})})^2 \approx a_* - a_0^2/(a_- - a_*).$$

Волновое число необыкновенных колебаний может быть получено из дифференциального уравнения

$$E'_- + [a_- + a_0^2/(a_- - a_*)] E_- = 0.$$

Это уравнение имеет ту же структуру, что и уравнение (2.17), поэтому можно перенести результаты, полученные Бадденом, на интересующий нас случай (см. п. 2.2.1). При этом величину  $\Gamma$  следует определить в соответствии с (2.32). Если выполняется условие  $q_e \ll 1$ , то для  $\Gamma$  можно получить явное выражение. В этом случае обычная точка поворота лежит поблизости от резонансной точки ( $|z - z_S| \ll L$ ), т. е. в области, где зависимость магнитного поля от координаты  $Z = z\omega/c$  можно аппроксимировать линейной функцией. Разлагая  $(k_{\parallel}^{(ex)})^2$  по малому отношению  $Z/L_*$  ( $L_* = L\omega/c$ ), получаем

$$(k_{\parallel}^{(ex)})^2 \approx \frac{q_e L_* (1 + p_*)}{2Z} + p_* + \frac{q_e (3 - 2p_* + p_*^2)}{4(1 + p_*)} + \\ + \frac{q_e Z (1 - p_*)^2}{8L_* (1 + p_*)^3} (1 - 6p_* + p_*^2).$$

Поскольку интеграл по  $dz$  в (2.32) определяется характерным интервалом  $\delta z \sim |z_r - z_S| \sim q_e L$ , то разложение  $(k_{\parallel}^{(ex)})^2$  по  $Z/L_*$  переходит в разложение  $\Gamma$  по  $q_e$ :

$$\Gamma \approx \frac{\pi L_* q_e (1 + p_*)}{2p_*^{3/2}} \left[ 1 + \frac{q_e (-3 + 2p_* + p_*^2)}{8p_* (1 + p_*)} + \frac{3q_e (1 - p_*)^2 (5 + p_*)}{2^6 p_*^2 (1 + p_*)} \right]. \quad (2.47)$$

Проведенное рассмотрение относится к области промежуточных значений  $q_e (1 \gg q_e \gg L_*^{-1})$ . Анализ колебаний при  $q_e \gg 1$  не составляет труда. В этом случае колебания, распространяющиеся со стороны большого поля, практически целиком поглощаются, а со стороны меньшего отражаются. Ограничение на значения  $q_e$  снизу связано с использованием квазиклассического приближения, для чего требуется, чтобы расстояние между точками поворота  $z_S$  и  $z_r$  ( $|z_r - z_S| \approx L q_e$ ) значительно превышало характерную длину волны колебаний  $c/\omega$ . Это условие нарушается при  $q_e \leq L_*^{-1}$ . Однако в этом случае система уравнений (2.21), (2.22) может быть упрощена иным способом. Дело в том, что взаимосвязь уравнений осуществляется через члены, пропорциональные  $q_e^2$ . Пренебрегая ими, сразу получаем два отдельных уравнения, описывающих независимое распространение необыкновенных и обыкновенных колебаний. При линейном профиле магнитного поля уравнение (2.10) можно представить в виде уравнения Уиттекера (см. п. 2.2.1) с

$$Z \rightarrow Z \left( p_* - q_e \frac{(-3 + 2p_* + p_*^2)}{2(1 + p_*)} \right)^{1/2},$$

где  $\Gamma$  с точностью до членов первого порядка по  $q_e$  (включительно) совпадает с (2.47). Естественно, что его анализ приводит к формулам Баддена. Приближение малых значений  $q_e$  перекрывается с квазиклассическим приближением при  $L_*^{-1} \ll q_e \ll L_*^{-1/3}$ . В этом интервале изменения  $q_e$  значения  $\Gamma$ , получаемые разными способами, совпадают.



Резонансное взаимодействие необыкновенных колебаний в рассматриваемых здесь условиях целиком обусловлено неоднородностью магнитного поля. Действительно, у колебаний с  $\omega = \omega_e$ , распространяющихся под углом к однородному магнитному полю, отсутствует компонента электрического поля, вращающаяся в электронную сторону (см. п. 1.2.2). Однако если магнитное поле меняется в продольном направлении ( $\nabla B_0 \parallel \mathbf{B}_0$ ), то по мере приближения к резонансной точке продольная компонента волнового вектора необыкновенных колебаний неограниченно возрастает — волна «выпрямляется» вдоль  $\mathbf{B}_0$  [ $\theta = \arctg(k_{\perp}/k_{\parallel}) \rightarrow 0$ ]. Такие колебания уже могут резонансно взаимодействовать с электронами. Действительно, из  $y$ -компоненты волнового уравнения (1.24) находим

$$E_x/E_y = (-N_{\parallel}^2 + \epsilon_{yy})/\epsilon_{xy}. \quad (2.48)$$

Здесь при  $z \rightarrow 0$  имеем  $\epsilon_{yy} = (1/2)(\epsilon_{++} + \epsilon_{--}) \approx q_e L_*/Z$ ;  $\epsilon_{xy} = (1/2i) \times (\epsilon_{-+} - \epsilon_{+-}) \approx -iq_e L_*/Z$  и  $N_{\parallel}^2 \approx q_e L_*(1 + p_*)/Z$ . Последнее соотношение следует из (2.45). Используя эти выражения, приведем (2.48) к виду

$$E_x/E_y \approx -i(1 - N_{\perp}^2).$$

Таким образом, рассматриваемые колебания обладают эллиптической поляризацией, причем вектор электрического поля вращается в электронную сторону. При  $N_{\perp} \rightarrow 0$  поляризация переходит в круговую.

Быше считалось, что магнитное поле изменяется в продольном направлении. Такие конфигурации характерны для открытых магнитных ловушек. Однако и в этом случае условие  $\nabla B_0 \parallel \mathbf{B}_0$  выполняется строго лишь на оси системы. Если угол  $\psi$  между  $\nabla B_0$  и  $\mathbf{B}_0$  отличен от нуля, то эффект выпрямления приводит не к циклотронному резонансу, а к так называемому плазменному на частоте  $\omega_{\text{res}} \approx \omega_e - \psi^2 \omega_{pe}^2 / \omega_e$  ( $\psi \ll 1$ ) [8]. Естественно, однако, ожидать, что и в этом случае циклотронное резонансное взаимодействие происходит так же, как и при  $\psi = 0$ , если изменение циклотронной частоты в пределах резонансной зоны превышает разность  $\omega_e - \omega_{\text{res}}$ , т. е.

$\max(k_{\parallel} v_{Te}; \omega_e (\rho_{Te}/L)^{1/2}) \gg \psi^2 \omega_{pe}^2 / \omega_e$ . Оценку для  $\max k_{\parallel} \approx (\omega/c^{2/3}) \times [(q_e v_{Te})(1 + p_*)]^{1/3}$  получаем с помощью уравнения (2.45), положив в нем  $\omega z/L \approx v_{Te} \max k_{\parallel}$ . В результате находим, что непараллельность векторов  $\mathbf{B}_0$  и  $\nabla B_0$  незначительна, если

$$\psi \ll \max \{q_e^{-1/3} (\rho_{Te}/L)^{1/4}; (1 + p_*)^{-1/6} (v_{Te}/q_e c)^{1/3}\}.$$

В заключение проанализируем поведение обыкновенных колебаний в резонансной области. В окрестности резонансной точки выполняется условие  $a_{-} \gg a_*$ ,  $a_0$ , и поэтому для  $k_{\parallel}^{(\text{or})}$  имеем прибли-

женное выражение  $(k_{\parallel}^{(or)})^2 \approx a_* - a_0^2/a_-$ . Заменяя в (2.46)  $E_*''$  на  $-(k_{\parallel}^{(or)})^2 E_*$ , получаем  $E_- \approx -(a_0/a_-) E_* \rightarrow 0$ . Таким образом, в  $z \rightarrow z_S$

неоднородном магнитном поле, как и в однородном, поляризация обыкновенных колебаний остается число ионной. Поэтому в приближении холодной плазмы обыкновенные колебания не взаимодействуют с электронами резонансно.

**2.2.3. Циклотронные колебания при  $\nabla B_0 \parallel B_0$ .** Наклонное распространение по отношению к магнитному полю ( $\theta \neq \pi/2$ ). Рассчитаем коэффициент поглощения электронных циклотронных колебаний ( $\omega \approx \omega_e$ ) при прохождении через зону циклотронного резонанса в неоднородном магнитном поле. Такие расчеты проводились [42—44, 49, 110—117] в связи с проблемой электронного циклотронного нагрева плазмы в токамаках. В большинстве работ коэффициент поглощения вычисляли в ВКБ-приближении интегрированием локального коэффициента пространственного затухания по траектории луча. Более простой способ вычисления, которому и будем следовать, состоит в использовании адиабатического волнового уравнения, дополненного правилом обхода Ландау [40, 103]. Ограничения, связанные с таким подходом, указаны в п. 2.2.2. Аспекты проблемы, которые не могут быть проанализированы с помощью адиабатического волнового уравнения, рассмотрены ниже.

В холодной плазме лишь необыкновенные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля ( $\theta=0$  при  $r \rightarrow r_S$ ), резонансно взаимодействуют с электронами. Показатель преломления таких колебаний в резонансной точке обращается в бесконечность (см. выше). Если  $\nabla B_0$  направлен под некоторым углом  $\psi$  к  $B_0$ , то невозможно возбудить распространяющиеся вдоль магнитного поля необыкновенные колебания с частотой  $\omega \approx \omega_e$ . Действительно, вдали от резонанса показатель преломления конечен ( $N \sim 1$ ). По мере приближения к резонансу меняется лишь проекция  $N = kc/\omega$  на  $\nabla B_0$ , в то время как компонента  $N$ , перпендикулярная  $B_0$ , остается неизменной. Следовательно, условия  $N = \infty$ ,  $\theta=0$  не могут быть удовлетворены одновременно. При распространении под углом к магнитному полю необыкновенные колебания, как и обыкновенные, в точке циклотронного резонанса имеют чисто ионную поляризацию электрического вектора ( $E_- = 0$ ). Поэтому при  $\theta=0$  резонансное взаимодействие обусловлено эффектами теплового движения электронов (см. п. 1.2.5). Для их учета, так же как и выше, будем использовать волновое уравнение в адиабатическом приближении, учитывая неоднородность магнитного поля параметрически. [Выход за рамки этого приближения осуществлялся лишь в работе [40], где в условиях слабого поглощения ( $\eta \ll 1$ ) анализировалось нелокальное интегральное волновое уравнение, в котором учитывались эффекты теплового движения электронов вдоль неоднородного магнитного поля. Для коэффициента поглощения было получено выражение  $\eta \approx \Gamma$ , согласующееся с (2.50), — см. ниже.] Соответствующее адиабатическому приближению волновое урав-

нение для случая однородного поля приведено в п. 1.2.1 (см. также п. 1.2.5). Если  $\mathbf{B}_0$  зависит от координаты  $s = x \sin \psi + z \cos \psi$ , то при анализе коротковолновых квазиклассических колебаний также можно использовать уравнение (1.25), считая в нем  $\omega_e$  и  $\mathbf{N} = \mathbf{k}c/\omega$  функциями координаты  $s$ . В рассматриваемом случае ( $\nabla B_0 \nparallel \mathbf{B}_0$ ) удобно использовать систему координат, ориентированную таким образом, чтобы  $\nabla B_0$  лежал в плоскости  $XOZ$  (см. рис. 2.9). При этом вектор  $\mathbf{k}$  будет наклонен к плоскости  $XOZ$  под некоторым углом  $\alpha$ , вообще говоря, отличным от 0. Для учета этого обстоятельства элементы матрицы  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{23}$  в волновом уравнении (1.25) должны быть помножены на  $\exp(-2i\alpha)$ ,  $\exp(-i\alpha)$  и  $\exp(i\alpha)$  соответственно. Для транспонированных элементов следует взять сопряженные множители, диагональные элементы не меняются.

В квазиклассическом приближении выражение для электрического поля колебаний имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{E}_0 \exp\left(-i\omega t + i\mathbf{k}'\mathbf{r} + i\int \mathbf{k}_s(s) d\mathbf{r}\right),$$

где  $\mathbf{k}_s = (k_e)\mathbf{e}_s$ ;  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}_s$ ;  $\mathbf{e}_s = \nabla B_0 / |\nabla B_0|$ .

Коэффициент поглощения можно найти, сопоставив амплитуду колебаний по разные стороны от резонансной зоны. Нетрудно видеть, что коэффициент поглощения (по мощности) дается выражением (2.16) с  $\Gamma = 2 \int_C ds \operatorname{Im} k_s$ , где контур интегрирования  $C$  выби-

рается в соответствии с правилом обхода Ландау. Для того чтобы найти  $\operatorname{Im} k_s$ , используем адиабатическое волновое уравнение. Из него находим так называемое локальное дисперсное соотношение, по виду совпадающее с (1.32), где индукцию магнитного поля следует считать функцией координаты  $s$ . Учитывая вид  $A_{11}$ , для

$\frac{\partial}{\partial k_s} A_{11}$  удобно использовать представление

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial k_s} = 2k_s \frac{\partial}{\partial(k^2)} A_{11} + 2(\mathbf{k}_\perp \mathbf{e}_s) \frac{\partial}{\partial(k_\perp^2)} A_{11}.$$

Здесь  $A_{11}$  определяется из (1.25) в пренебрежении тепловыми эффектами.

То же самое выражение (2.16) для коэффициента поглощения можно получить, рассмотрев движение волнового пакета. При прохождении через резонансную зону амплитуда пакета уменьшается на множитель  $\exp(-\Gamma'/2)$ , где  $\Gamma' = 2 \int \gamma(s(t)) dt$ . Используя соотношения

$$\gamma = -A' \left( \frac{\partial A_{11}}{\partial \omega} \right)^{-1} \operatorname{Re} \frac{1}{\sigma(s)}; \quad dt = \frac{ds}{V_{s, \text{гп}}};$$

$$V_{s, \text{гп}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_s} = - \frac{\partial A_{11}}{\partial k_s} / \frac{\partial A_{11}}{\partial \omega},$$

получаем  $\Gamma' = \Gamma$ . Здесь  $A'$  — второе слагаемое в (1.34). Отметим, что использование понятия групповой скорости может оказаться

непригодным в окрестности резонансной точки из-за сильного поглощения [40].

Наиболее существенная зависимость  $\text{Im } k_s$  от координаты  $z$  связана с аргументом функции  $W$ . Интеграл, входящий в выражение для  $\Gamma$ , проще всего вычислить, выбрав радиус обхода резонансной точки ( $s=0$ ) настолько большим, чтобы для  $W(\omega)$  можно было использовать асимптотическое представление (2.20), при этом

$$W^{-1} \approx -i \pi^{1/2} (\omega - 1/2\omega) \quad \text{и} \quad J = \int_C d\omega \text{Re } W^{-1}(\omega) \approx (1/2) \pi^{3/2}.$$

Заметим, что этот результат на самом деле является точным [12, 13]:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \text{Re } W^{-1}(\omega) = (\pi^{1/2}/2) \text{Im} \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \ln \left[ \pi^{3/2}/2i + \int_0^{\omega} d\omega' \exp(\omega'^2) \right]_{-\omega_1}^{\omega_1} = \pi^{3/2}/2. \quad (2.49)$$

Используя (2.49), находим следующее выражение для величины  $\Gamma$ , определяющей коэффициент поглощения:

$$\Gamma = \frac{\pi}{4} \frac{L\omega}{c} \left( \frac{v_{Te}}{c} \right)^2 \frac{1}{q_e N} N_{\perp}^4 N_{\parallel}^2 (N^2 + 2q_e - 1)^2 (N_{\perp}^2 + q_e - 1) [(N_{\perp}^2 + N^2 + 2q_e - 3) \sin \theta \cos \alpha \sin \psi + (N_{\perp}^2 - q_e + 2) \cos \theta \cos \psi]^{-1}. \quad (2.50)$$

Распространение поперек магнитного поля ( $\theta = \pi/2$ ). Колебания, распространяющиеся поперек магнитного поля ( $\theta = \pi/2$ ), требуют специального анализа. При  $\theta = \pi/2$  показатель преломления необыкновенных колебаний равен  $N^2 = 2 - q_e$ . Поэтому формула (2.50) дает  $\eta_{\text{ex}}(\theta = \pi/2) = 0$ . Этот результат вполне понятен, поскольку при  $\theta = \pi/2$  электрическое поле необыкновенных колебаний перпендикулярно  $\mathbf{B}_0$  ( $E_{\parallel} = 0$ ), причем компонента  $E_{\perp}$  в первом приближении по параметру  $\beta_e = v_{Te}/c$  обращается в 0 (см. п. 1.2.5). [Только такие поправки учитывались при выводе (2.50).] Наличие  $E_{\perp} \sim \beta_e^2 E_{\perp}$  приводит к  $\eta_{\text{ex}} \sim \Gamma_{\text{ex}} \sim \beta_e^4$ . Резонансное взаимодействие составляющей  $E_{\perp}$  обусловлено эффектами конечного ларморовского радиуса электронов и дает вклад того же порядка малости в  $\eta_{\text{ex}}$ . Коэффициент пространственного затухания необыкновенных колебаний с такой точностью был вычислен в п. 1.2.7 для случая однородного магнитного поля. При анализе была учтена релятивистская зависимость электронной циклотронной частоты от энергии электронов, что существенно при  $\omega \approx \omega_e$ . Выражение для коэффициента пространственного затухания необыкновенных колебаний, полученное в п. 1.2.7, имеет довольно сложный вид. Однако оно существенно упрощается на достаточно большом расстоянии от резонансной точки  $\delta s \gg L\beta_e^2$ . В этой области можно воспользоваться асимптотическими выражениями для функций  $F_l$ , входящих

в  $\kappa_{\text{ex}}$ . В результате получаем

$$N^2 \approx 2 - q_e + \frac{(2 - q_e)^2}{2q_e} \left( \frac{\omega - \omega_e(s)}{\omega} - \frac{1}{2} \beta_e^4 (1 + (2 - q_e)^2) \frac{\omega}{\omega - \omega_e(s)} \right). \quad (2.51)$$

Использование правила обхода Ландау позволяет при вычислении коэффициента поглощения необыкновенных колебаний обойтись довольно простым выражением (2.51), что приводит к следующему выражению:

$$\Gamma_{\text{ex}} = 2\text{Im} \int dx k_x = \frac{\pi}{4q_e} (2 - q_e)^{3/2} \beta_e^4 (1 + (2 - q_e)^2) \frac{\omega L}{c \cos \alpha \sin \psi}.$$

Здесь учтен вклад второго — сингулярного слагаемого в скобках в (2.51).

При  $\theta = \pi/2$  показатель преломления обыкновенных колебаний равен  $N^2 = 1 - q_e$ , поэтому выражение (2.50) содержит неопределенность. Она раскрывается, если для  $N^2$  использовать приближенное выражение

$$N^2 \approx 1 - q_e + q_e (1 - q_e) \cos^2 \theta. \quad (2.52)$$

Учитывая также равенство  $N_{\perp}^2 = 1 - q_e - (1 - q_e)^2 \cos^2 \theta$ , которое следует из (2.51), находим

$$\Gamma_{\text{or}} = \frac{\pi}{2} q_e (1 - q_e)^{1/2} \frac{L\omega}{c} \beta_e^2 \frac{1}{\cos \alpha \sin \psi}. \quad (2.53)$$

Релятивистские эффекты, существенные при  $\theta = \pi/2$  в окрестности резонансной точки, не влияют на распространение колебаний на достаточно большом расстоянии от нее. Поэтому то же самое выражение (2.53) для  $\Gamma_{\text{or}}$  можно получить с использованием «релятивистского» показателя преломления (см. п. 1.2.7).

Отражение колебаний при распространении поперек магнитного поля. Выше при выводе коэффициента поглощения использовалось квазиклассическое приближение. Обсудим условия его применимости. При  $\psi \neq 0$  действительная часть волнового вектора существенно изменяется на расстоянии порядка  $L$ , а мнимая — в пределах резонансной зоны, т. е. на расстоянии порядка  $\Delta r_S \approx \max \{ (\rho_{Te} L \cos \psi)^{1/2}, L \beta_e \cos \theta \}$ . Если хотя бы один из углов  $\theta, \psi$  существенно отличается от  $\pi/2$ , то в условиях термоядерного эксперимента ( $L \geq 10^2$  см;  $v_{Te} \geq 10^8$  см/с;  $\omega_e \geq 3 \times 10^{11}$  рад/с) размер резонансной зоны превышает длину волны, примерно равную  $c/\omega$ . В обратном случае ( $\theta \approx \psi \approx \pi/2$ ) величина  $\Delta r_S$  сравнивается с длиной волны колебаний, и, следовательно, квазиклассическое приближение вообще говоря становится неприменимым. Однако даже при  $\theta = \psi = \pi/2$  квазиклассическое приближение дает правильные результаты при вычислении коэффициента прохождения колебаний  $\zeta$  через резонансную область. Для этого вычисления надо производить с использованием правила обхода Ландау, обходя резонансную область на расстояниях, значительно

превышающих характерную длину волны колебаний  $c/\omega$ . Действительно, переход к комплексным значениям координаты приводит к появлению  $\text{Im } k$ , что соответствует эффективному «размытию» зоны резонансного взаимодействия.

Вместе с тем, определив коэффициент прохождения колебаний, не получаем никакой информации о том, какая часть энергии колебаний поглотилась, а какая отразилась от зоны циклотронного резонанса. На основании общих представлений теории распространения колебаний в неоднородных средах можно утверждать, что при  $\delta r_S \gg \lambda$  коэффициент отражения должен быть экспоненциально мал по параметру  $\delta r_S/\lambda \gg 1$ . В то же время при  $\delta r_S \leq \lambda$ , когда становится несправедливым квазиклассическое приближение, коэффициент отражения может оказаться весьма значительным.

Вопрос об отражении колебаний от резонансной зоны был поднят в работе [114], где для анализа обыкновенных колебаний использовалось упрощенное асимптотическое волновое уравнение, справедливое на достаточно большом расстоянии от резонансной точки  $\delta r_S \gg L\beta_e^2$ :

$$\frac{d}{dx} \left( 1 + \frac{q_e}{2} \frac{\omega}{\omega - \omega_e(x)} \beta_e^2 \right) \frac{d}{dx} E_{\parallel} + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 (1 - q_e) E_{\parallel} = 0. \quad (2.54)$$

Так как мы рассматриваем случай  $\psi = \pi/2$ , то считается, что  $\nabla B_0$  направлен параллельно оси  $OX$  (см. рис. 2.9). Уравнение (2.54) без члена с первой производной  $(d/dx) E_{\parallel}$  можно получить, подставив в «локальное» дисперсионное соотношение (1.46) асимптотическое представление для  $\epsilon_{\parallel}$  из (1.43) и заменив  $k_x$  на  $-id/dx$ . [Чтобы получить полное уравнение (2.54), включая член с первой производной, необходимо использовать кинетическое уравнение.]

Если в (2.54)  $E_{\parallel}$  заменить  $G = \int^x dx E_{\parallel}$  и сместить начало отсчета на  $x_S - L'$ , то (2.54) примет вид

$$G'' + (\omega/c)^2 (1 - q_e) (1 - L'/x) G = 0, \quad (2.55)$$

где  $x_S$  — резонансная точка;  $L' = (1/2) L q_e \beta_e^2$ . Последнее уравнение без труда сводится к уравнению Уиттекера. Поэтому вполне естественно, что анализ распространения колебаний с помощью уравнения (2.55), дополненного правилом обхода Ландау сингулярной точки, приводит к формулам Баддена для коэффициентов поглощения, прохождения и отражения (см. п. 2.2.1), причем величина  $\Gamma$  оказывается равной (2.53). Из формул Баддена, в частности, следует, что колебания, распространяющиеся со стороны меньшего магнитного поля, при  $\Gamma \gg 1$  практически полностью отражаются от зоны циклотронного резонанса. Этот вывод мог бы иметь важное значение для проблемы циклотронного нагрева, так как он означает, что, например, в случае токамаков ВЧ-мощность не следует вводить с внешней стороны тора. Между тем в п. 2.2.1 было показано, что для корректного решения вопроса об отражении колебаний нельзя использовать правило обхода Ландау и необходимо

найти вид решения в самой резонансной зоне. Соображения, высказанные в этом подразделе по поводу необыкновенных колебаний при  $\theta = \psi = 0$ , сохраняют свою силу и в данном случае. А именно, коэффициент отражения колебаний, распространяющихся со стороны меньшего магнитного поля, может быть определен только с помощью полного волнового уравнения [103]. Коэффициент отражения колебаний, распространяющихся в противоположном направлении, равен 0. Что касается коэффициента прохождения через резонансную зону, то он не зависит от направления распространения и может быть вычислен с помощью приближенного асимптотического уравнения (2.55) —  $\zeta = \exp(-\Gamma_{or})$ .

Полное волновое уравнение, описывающее распространение обыкновенных колебаний поперек неоднородного магнитного поля, имеет вид [103]

$$\frac{d}{dx}(1 + q_e F(x)) \frac{d}{dx} E_{\parallel} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (1 - q_e) E_{\parallel} = 0. \quad (2.56)$$

Здесь  $F(x) = (1/2) F_{7/2}(g(x))$ ;  $g(x) = \beta_e^{-2} [\omega - \omega_e(x)]/\omega$ ;

$$F_l(g) = \sum_{m=0}^{l-3/2} (-g)^m (l - m - 2)! / (l - 1)! + i \pi (-g)^{l-1} W((-g)^{1/2} / (l - 1)!);$$

$W$  — интеграл вероятности от комплексного аргумента (см. п. 2.1.3). Как и выше, считаем  $d\omega_e/dx < 0$ . Резонансная точка  $x_S [\omega = \omega_e(x_S)]$  является точкой ветвления функции  $F(x)$ . Поскольку  $d\omega_e/dx < 0$ , то в соответствии с правилом обхода Ландау функция  $F(x)$  однозначно определена лишь в верхней полуплоскости комплексного переменного  $x$ . При выводе (2.56) в кинетическом уравнении учтены эффекты, обусловленные конечностью ларморовского радиуса электронов и релятивистской зависимостью циклотронной частоты от энергии электронов, причем считалось  $|\rho_{Te} d/dx| \ll 1$ ;  $\beta_e \ll 1$ . На достаточно большом расстоянии от резонансной точки ( $x \gg L\beta_e^2$ ) уравнение (2.56) сводится к (2.55).

Используем (2.56) для вычисления коэффициента отражения колебаний, распространяющихся со стороны меньшего магнитного поля. Предположим сначала, что выполняется условие  $\Gamma_{or} \ll 1$ . В этом случае решение уравнения (2.56) всюду, в том числе и в резонансной зоне, слабо отличается от плоской волны  $E_{\parallel}^{(0)} \approx \exp(-ikx)$ , где  $k = (\omega/c)(1 - q_e)^{1/2}$ . Учитывая влияние резонансного взаимодействия по методу последовательных приближений, находим поправку к решению  $E_{\parallel}^{(0)}$ :

$$E_{\parallel}^{(1)}(x) = -\frac{q_e}{4} \int_{-\infty}^x dx' \{ \exp[ik(x' - x)] - \exp[-ik(x' - x)] \} \frac{d_{7/2}(g(x'))}{dx} \exp(ikx'). \quad (2.57)$$

Из (2.57) получаем, что при единичной амплитуде прошедшей волны амплитуда отраженной дается выражением

$$A_{\text{отр}} = \frac{i}{4} k q_e \int_{-\infty}^{\infty} dx' F_{7/2}(g(x')) \exp(-2i k x'). \quad (2.58)$$

При вычислении интегралов в (2.58) для функции  $F_{7/2}(g(x))$  удобно использовать представление [45]

$$F_{7/2}(g(x)) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^0 dt (1 + it)^{-7/2} \exp(-i g(x)t),$$

где  $g(x) = \beta_e^{-2}(x - x_S)L^{-1}$ .

Поменяем в (2.58) порядок интегрирований. Интеграл по  $dx'$  дает  $\delta(t)$ . Полагая  $\int_{-\infty}^0 dt \delta(t) f(t) = (1/2)f(0)$ , находим  $A_{\text{отр}} = \Gamma_{\text{отр}}(1 - 2i \mu_{\text{отр}})^{-7/2} \exp(-2i k x_S)$ , где  $\mu_{\text{отр}} = k_{\text{отр}} L \beta_e^2$  — параметр квазиклассичности;  $k_{\text{отр}} = (\omega/c)(1 - q_e)^{1/2}$ . С помощью последнего выражения получаем коэффициент отражения

$$\xi \approx |A_{\text{отр}}|^2 = \Gamma_{\text{отр}}^2 (1 + 4\mu_{\text{отр}}^2)^{-7/2}. \quad (2.59)$$

При  $\mu_{\text{отр}} \ll 1$  из (2.59) имеем  $\xi \approx \Gamma_{\text{отр}}^2$ . Этот результат можно было бы получить из упрощенного асимптотического волнового уравнения (2.55), поскольку длинноволновые колебания не «чувствуют» тонкой структуры резонансной зоны, где только и проявляется различие между точным волновым уравнением (2.56) и приближенным (2.55). Однако коэффициент отражения коротковолновых колебаний с  $\mu_{\text{отр}} \gg 1$  может быть значительно меньше  $\Gamma_{\text{отр}}^2$ . Заметим, что коэффициент отражения коротковолновых колебаний можно найти при произвольных значениях  $\Gamma_{\text{отр}}$ . Их отражение обусловлено главным образом наличием точки ветвления  $x_S$  у функции  $F_{7/2}(g(x))$ , причем, поскольку эта особенность довольно «слабая»  $F_{7/2}(g(x)) \approx \approx C_1 + C_2(x - x_S)^{5/2}$ , коэффициент отражения можно определить методом последовательных приближений:

$$\xi \approx [(\pi q_e)^2 / 2^9 \mu_{\text{отр}}^5] (1 + q_e/5)^{5/2}. \quad (2.60)$$

Нетрудно видеть, что при  $q_e \ll 1$  и  $\mu_{\text{отр}} \gg 1$  выражения (2.59) и (2.60) совпадают. (При  $\mu_{\text{отр}} \gg 1$  условие  $\Gamma_{\text{отр}} \gg 1$  выполняется только, если  $q_e \ll 1$ ).

Метод последовательных приближений нельзя использовать при  $\Gamma_{\text{отр}} \gg 1$ , если  $\mu_{\text{отр}} \leq 1$ . Расчеты [103], выполненные с помощью ЭВМ, позволили исследовать и эту область. При  $\mu_{\text{отр}} \leq 1$  длина волны колебаний по порядку равна размеру резонансной зоны, и отражение обусловлено «плавной» неоднородностью функции  $F_{7/2}(g(x))$ . С увеличением  $\mu_{\text{отр}}$  (при  $\mu_{\text{отр}} \gg 1$ ) область отражения стягивается к точке  $x_S$ , особой для функции  $F_{7/2}(g(x))$ .



На рис. 2.12 представлена типичная зависимость коэффициента отражения колебаний  $\tilde{\xi} = \xi^{1/2} = |A_{\text{отр}}/A_{\text{пад}}|$  от параметра квазиклассичности  $\mu_{\text{ор}}$  при фиксированном значении  $q_e = 0,5$ . Если  $\mu_{\text{ор}} < \mu_{\text{ор}}^{\text{max}} \approx 0,3$ , то зависимость  $\tilde{\xi}$  от  $\mu_{\text{ор}}$  приближенно описывается формулой  $\tilde{\xi} = \Gamma_{\text{ор}} = (\pi/2) q_e \mu_{\text{ор}}$ . При  $\mu_{\text{ор}} > \mu_{\text{ор}}^{\text{max}}$  коэффициент отражения падает с  $\mu_{\text{ор}}$ , причем закон спада с увеличением  $\mu_{\text{ор}}$  становится близким к определяемому из (2.59), (2.60). Отметим, что хотя значение  $q_e = 0,5$  не слишком мало, рассчитанная зависимость  $\tilde{\xi}(\mu_{\text{ор}})$  во всей области изменения  $\mu_{\text{ор}}$  близка к определенной из (2.59) (рис. 2.12).

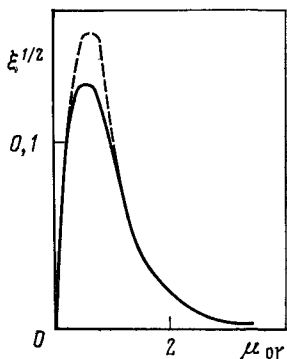


Рис 2.12

Рис. 2.12. Зависимость коэффициента отражения по амплитуде  $\xi^{1/2}$  для обычных колебаний, распространяющихся со стороны меньшего магнитного поля, от параметра квазиклассичности  $\mu_{\text{ор}}$ :

— — — коэффициент отражения, рассчитанный по (2.55);  $q_e = 0,5$

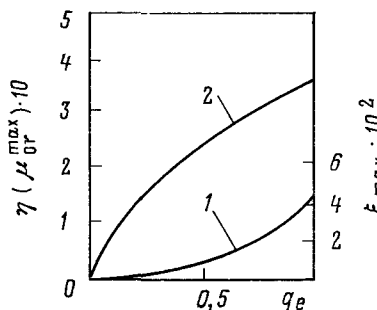


Рис. 2.13

Рис. 2.13. Зависимость максимального коэффициента отражения  $\xi_{\text{max}} = \max \xi(\mu_{\text{ор}})$  (1) и коэффициента поглощения  $\eta(\mu_{\text{ор}}^{\text{max}})$  (2) от  $q_e$ ;  $\mu_{\text{ор}}^{\text{max}}$  соответствует максимуму коэффициента отражения [ $\xi(\mu_{\text{ор}}^{\text{max}}) = \xi_{\text{max}}$ ]

При изменении  $q_e$  положение максимума кривой  $\tilde{\xi}(\mu_{\text{ор}})$  меняется слабо, так что всегда  $\mu_{\text{ор}}^{\text{max}} \approx 0,3$ . Величина максимума растет с увеличением  $q_e$ . На рис. 2.13 показана зависимость  $\xi_{\text{max}} = \xi(\mu_{\text{ор}}^{\text{max}})$  коэффициента поглощения  $\eta(\mu_{\text{ор}}^{\text{max}})$  от  $q_e$ . При  $\mu_{\text{ор}} < \mu_{\text{ор}}^{\text{max}}$  для приближенного определения коэффициентов  $\xi$  и  $\eta$  можно использовать формулы (2.29), (2.30), откуда получаем  $\xi \approx \Gamma_{\text{ор}}^2$ ,  $\eta \approx \Gamma_{\text{ор}}$  и, следовательно,  $\xi \ll \eta$ . (Напомним, что  $\Gamma_{\text{ор}} = (\pi/4) q_e \mu_{\text{ор}}$ .) При  $\mu_{\text{ор}} > \mu_{\text{ор}}^{\text{max}}$  коэффициент отражения падает, а коэффициент поглощения с хорошей точностью дается формулой  $\eta = 1 - \xi = 1 - \exp(-\Gamma_{\text{ор}})$ . Следова-

тельно, максимум отношения  $\xi/\eta$  достигается вблизи  $\mu_{\text{ор}}^{\text{max}}$  и, как следует из рис. 2.12, не превышает 1/6.

Таким образом, рассмотрение показывает, что коэффициент отражения колебаний, распространяющихся со стороны меньшего магнитного поля, значительно меньше коэффициента поглощения при произвольных значениях  $\mu_{\text{ор}}$  и  $q_e$ . Что касается колебаний, распространяющихся в противоположном направлении, то для них коэффициент отражения равен 0 (см. выше). Поскольку коэффициент прохождения не зависит от направления распространения колебаний, то коэффициент поглощения  $\eta=1-\xi-\xi$  в первом случае приближенно (с погрешностью не больше 15%), а во втором точно дается формулой  $\eta=1-\exp(-\Gamma_{\text{ор}})$ .

В заключение остановимся на необыкновенных колебаниях. Эти колебания взаимодействуют с электронами слабее обыкновенных ( $\eta \approx \Gamma_{\text{ex}} \sim \beta_e^4$ , см. выше), поэтому при их анализе метод последовательных приближений применим с хорошей точностью. Для колебаний, распространяющихся со стороны меньшего магнитного поля, он дает  $\xi \approx \Gamma_{\text{ex}}^2 \sim \beta_e^8$ . Необыкновенные колебания, распространяющиеся в противоположном направлении, как и обыкновенные, проходят через резонансную зону без отражения.

**2.2.4. Колебания на гармониках электронной циклотронной частоты.** Общий случай. При характерных для термоядерной плазмы условиях  $q_e \leq 1$ ,  $v_{Te}/c = \beta_e \ll 1$  резонансное взаимодействие электронов с колебаниями на гармониках циклотронной частоты слабое, и его влияние на распространение колебаний может быть учтено в рамках метода последовательных приближений. (Исключение составляют лишь необыкновенные колебания с  $\omega \approx 2\omega_e$ , распространяющиеся поперек магнитного поля, см. ниже.) При этом коэффициент поглощения удобно рассчитывать по формуле

$$\eta = S_s^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} Q ds, \quad (2.61)$$

где  $Q = (\omega/8\pi) \text{Im} \epsilon_{\alpha\beta} E^*_{\alpha} E_{\beta}$  — энергия, поглощаемая в единице объема за единицу времени;  $S_s$  — проекция плотности потока энергии на направление градиента магнитного поля.

Смещая в (2.61) контур интегрирования в комплексную плоскость в соответствии с правилом обхода Ландау, получаем возможность на всем контуре использовать для  $\text{Im} \epsilon_{\alpha\beta}$  упрощенные адиабатические выражения. Очевидно, что результат интегрирования не должен зависеть от того, какие эффекты определяют размер резонансной зоны (эффект Доплера, релятивизм и др.). Вклад в интеграл (2.61) дают те компоненты  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , которые пропорциональны  $[\omega - \omega_e(s)]^{-1}$ . Из них наибольшие

$$\begin{aligned} \epsilon_{\perp\perp, \text{res}} &\approx -\frac{n^2}{n!} \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^{n-1} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - n\omega_e)}; \\ \epsilon_{\parallel\parallel, \text{res}} &\approx -\frac{1}{2n!} \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^n \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - n\omega_e)}, \end{aligned}$$

см. (1.31). Здесь значок  $\text{ges}$  означает, что учтена лишь резонансная часть соответствующей компоненты; величина  $\xi_{Te}^2 \sim \beta_e^2$  считается малой. С помощью этих выражений получаем

$$\eta \approx \frac{1}{8S_s} \frac{\omega_{pe}^2 L}{\omega} |E_+|^2 \left\{ n^2 (N^2 - \varepsilon_{--})^{-2} + \xi_{Te}^2 \left( \frac{N_{\parallel}}{N_{\perp}} \right)^2 (N^2 - 2\varepsilon_{\parallel\parallel})^{-2} \right\} \times \\ \times \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2} \xi_{Te}^2 \right)^{n-1} (N^2 - \varepsilon_{++})^2. \quad (2.62)$$

Здесь использованы соотношения (1.27), (1.28), связывающие различные составляющие электрического поля колебаний. Вектор Пойнтинга также можно было бы выразить через  $|E_+|^2$ , однако это выражение в общем случае очень громоздко и поэтому здесь его не приводим.

Из (2.62) следует, что коэффициент поглощения обращается в нуль при чисто продольном распространении, когда  $\xi_{Te} \sim k_{\perp} = 0$ . С увеличением угла  $\theta$  коэффициент поглощения возрастает, достигая значений, по порядку равных  $\eta \sim (\omega_{pe}^2 L / \omega c) \beta_e^{2(n-1)}$ . Для необыкновенных колебаний эта оценка остается справедливой вплоть до углов  $\theta \approx \pi/2$ . Поляризация обыкновенных колебаний при  $\theta = \pi/2$  чисто продольная ( $E_{\perp} = 0$ ,  $E_{\parallel} \neq 0$ ). Это обстоятельство скажется в уменьшении поглощения на множитель  $\beta_e^2$ .

Необыкновенные колебания с  $\omega \approx 2\omega_e$  при  $\theta = \pi/2$ . При распространении поперек магнитного поля резонансное взаимодействие достигает наибольшей интенсивности для обыкновенных колебаний с  $\omega \approx \omega_e$  и необыкновенных с  $\omega \approx 2\omega_e$ , причем соответствующие коэффициенты поглощения по порядку оказываются одинаковыми (см. выше). Поскольку колебания с  $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$  особенно удобно вводить в замкнутые магнитные ловушки, а критическая плотность, ниже которой могут распространяться необыкновенные колебания в плазме с  $\omega = 2\omega_e$ , в 2 раза превышает критическую плотность для обыкновенных с  $\omega = \omega_e$ , то изучению первых посвящено значительное число работ [114, 118—121]. Анализ необыкновенных колебаний затрудняется явлением трансформации в бернштейновские потенциальные колебания, которые могут распространяться в плазме в условиях, характерных для современного термоядерного эксперимента ( $q_e \sim 1$ ,  $\beta_e \ll 1$ ). Явление трансформации не может быть рассмотрено в рамках метода последовательных приближений [118], в ВКБ-приближении [119, 120] или с помощью адиабатического волнового уравнения [114]. Корректный анализ вопроса требует использования дифференциального волнового уравнения четвертого порядка [122]. Отметим также трудности, связанные с вычислением коэффициента отражения колебаний (см. п. 2.2.3).

В п. 1.4.2 было показано, что бернштейновские колебания появляются из-за наличия особенности у диэлектрической проницаемости плазмы при  $\omega = n\omega_e$ , причем их частоты отстоят от циклотронных на  $\omega_{pe} (k_{Te})^{2(n-1)}$  ( $k_{Te} \ll 1$ ). Этот результат был получен в пренебрежении релятивистской зависимостью циклотронной ча-

стоты от энергии электрона. Релятивистские эффекты, существенные при  $|\omega - n\omega_e| \ll n\omega_e\beta^2$ , «размывают» циклотронный резонанс и, следовательно, затрудняют существование бернштейновских колебаний. Из приведенных оценок следует, что при  $q_e \sim 1$ ,  $k \sim \omega/c$  необыкновенные колебания могут трансформироваться в бернштейновские только в окрестности второй гармоники электронной циклотронной частоты, причем и в этом случае учет релятивизма необходим для корректного описания явления.

Рассмотрим сначала качественно, какие эффекты следует ожидать при распространении интересующих нас колебаний в неоднородном магнитном поле. На рис. 2.14 схематически изображена зависимость частоты колебаний от волнового числа при  $\omega \approx 2\omega_e$ .

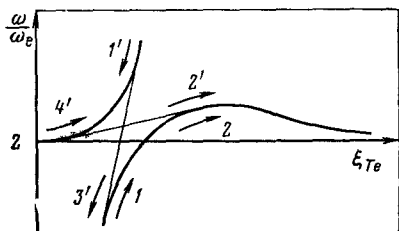


Рис. 2.14. Распространение необыкновенных колебаний с  $\omega \approx 2\omega_e$  поперек неоднородного магнитного поля

Если бы бернштейновские и необыкновенные колебания могли распространяться независимо, то соответствующие кривые  $\omega(k)$  пересекались бы в точке *a*. Взаимодействие колебаний вызывает расщепление зависимостей  $\omega(k)$ .

Из рис. 2.14 можно сделать вывод, что необыкновенные колебания, распространяющиеся из области большего магнитного поля (снизу на рис. 2.14), могут довольно эффективно трансформироваться в бернштейновские (стрелка с цифрой 2). Разумеется, часть энергии должна поглощаться в точке, где  $\omega_e(\mathbf{r}) = \omega$ , а часть просачиваться через барьер непрозрачности и уходить от резонанса в виде прошедшей волны (стрелка с цифрой 3). Рис. 2.14 показывает, что при распространении со стороны большего поля отраженная волна не возникает (ср. с п. 2.2.3).

При распространении со стороны меньшего поля (сверху на рис. 2.14) колебания набегают на точку отсечки, где  $k=0$ , от которой отражаются (стрелка с цифрой 4'). Отраженные колебания, преодолевая барьер непрозрачности, частично трансформируются в бернштейновские (стрелка с цифрой 2'). Следует ожидать, что в этом случае коэффициент трансформации будет иметь меньшее значение, чем при распространении со стороны большего магнитного поля.

Отметим, что по мере удаления бернштейновских колебаний от резонансной точки их волновое число возрастает. Когда оно по порядку сравнится с  $\rho_{Te}^{-1}$ , групповая скорость  $d\omega/dk$  поменяет знак, и поток энергии начнет движение в обратном направлении. Из рис. 2.14 следует, что приближение к резонансной точке сопровождается дальнейшим увеличением волнового числа. Поэтому берн-

штейновские колебания должны в конце концов поглотиться электронами, например, за счет небольшого отличия угла  $\theta$  от  $\pi/2$ .

Теперь изложим результаты работы [122], в которой распространение необыкновенных колебаний описывалось с помощью дифференциального уравнения четвертого порядка. Это уравнение можно получить, подставляя (1.45) в уравнение Максвелла и производя замену  $k \rightarrow -i\partial/\partial x$ . Оставляя слагаемые, пропорциональные  $\xi^2 \tau_e \ll 1$ , получаем [122]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q_e \frac{d}{dx} F_{7/2}(g(x)) \frac{d^3}{dx^3} E_y + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left( \left(1 - \frac{q_e}{3}\right) \frac{d^2}{dx^2} + \right. \\ \left. + q_e \left(1 - \frac{q_e}{6}\right) \frac{d}{dx} F_{7/2}(g(x)) \frac{d}{dx} \right) E_y + \\ \left. + \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \left(1 - \frac{q_e}{2}\right) \left(1 - \frac{q_e}{6}\right) E_y = 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где  $E_y = (1/2i)(E_+ - E_-)$ ; функция  $F(g(x))$  та же, что и в (2.45).

На достаточно большом расстоянии от резонансной точки решения уравнения (2.63) расщепляются на два класса:

$$E_{y; 1,2} \approx (x - x_S)^{\pm 1} \Gamma_{\text{ex}}^{(2)/2\pi} \exp[\pm i k_{\text{ex}}(x - x_S)], \quad (2.64)$$

описывающих длинноволновые необыкновенные колебания и коротковолновые бернштейновские моды:

$$E_{y; 3,4} \approx \exp\left\{ \pm \frac{2i}{3} \frac{\omega}{c\beta_e} (x - x_S)^{3/2} \left[ \frac{2}{q_e L} \left(1 - \frac{q_e}{3}\right) \right]^{1/2} \right\}, \quad (2.65)$$

где

$$\Gamma_{\text{ex}}^{(2)} = \frac{\pi}{2} q_e \beta_e^2 k_0 L \left(1 - \frac{q_e}{6}\right) / \left(1 - \frac{q_e}{3}\right), \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \left[ \frac{(1 - q_e/6)(1 - q_e/2)}{(1 - q_e/3)} \right]^{1/2}.$$

В окрестности резонансной точки характерные масштабы решений (2.64), (2.65) сравниваются. В этой области колебания различного типа могут трансформироваться друг в друга.

Аналогично тому как это было сделано в п. 2.2.3, можно показать, что коэффициент прохождения необыкновенных колебаний не зависит от направления распространения и равен  $\exp(-\Gamma_{\text{ex}}^{(2)})$ , а также, что колебания, падающие со стороны большего магнитного поля, проходят через резонанс без отражения. Что касается коэффициента отражения колебаний, распространяющихся в противоположном направлении, а также коэффициентов трансформации, то они, по-видимому, могут быть найдены лишь численно. Такие расчеты производились в работе [122]. Их результаты приведены на рис. 2.15—2.17. На них коэффициенты отражения и трансформации определены как отношения потоков энергии соответствующих колебаний к падающему. Отметим, что рис. 2.15 напоминает рис. 2.11, на котором изображена зависимость коэффициента отражения обыкновенных колебаний. Их сходство объясня-

ется одинаковой природой физических процессов, обуславливающих отражение. Однако коэффициент отражения на второй гармонике электронной циклотронной частоты существенно больше и возрастает по мере приближения плотности к критической (плотность отсечки  $q_{e,cr}=2$ ). Отметим также, что в соответствии с сооб-

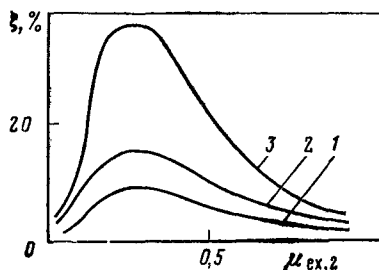


Рис. 2.15. Зависимость коэффициента отражения колебаний, распространяющихся со стороны меньшего поля, от параметра квазиклассичности  $\mu$ :

1 —  $q_e=1,0$ ; 2 —  $q_e=1,2$ ; 3 —  $q_e=1,7$ ;  $\mu_{ex,2} = k_{ex,2} L (v_{Te}/c)^2$  — параметр квазиклассичности,  $k_{ex,2} = (\omega/c) [(1-q_e/2)(1-q_e/6)/(1-q_e/3)]^{1/2}$  — волновое число необыкновенных колебан

$$c \omega = 2\omega_e \text{ при } k r_{Te} \ll 1$$

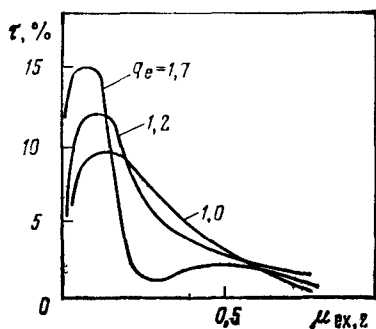


Рис. 2.16. Зависимость коэффициента трансформации колебаний, распространяющихся со стороны меньшего магнитного поля, от параметра квазиклассичности  $\mu$

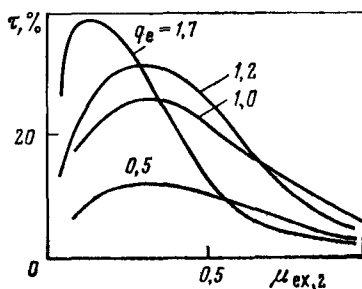


Рис. 2.17. Зависимость коэффициента трансформации колебаний, распространяющихся со стороны большего магнитного поля, от параметра квазиклассичности  $\mu$

ражениями, приведенными в начале настоящего подраздела, коэффициент трансформации колебаний, падающих со стороны большего поля, превышает коэффициент трансформации колебаний, распространяющихся в противоположном направлении. С учетом явления трансформации коэффициент поглощения равен  $\eta = 1 - \xi - \zeta - \tau$ . Однако поскольку бернштейновские колебания в конце концов поглощаются электронами, то полный коэффициент поглощения следует рассчитывать по формуле  $\eta = 1 - \xi - \zeta$ .

2.2.5. **Ионные циклотронные колебания.** В области частот порядка ионной циклотронной имеются две ветви колебаний: альфвеновская и магнитозвуковая. Альфвеновские колебания распространяются только в области достаточно низкого магнитного поля ( $\omega_i < \omega$ ), причем к точке циклотронного резонанса могут подойти лишь колебания с  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$  (см. п. 1.2.3). Соображения, аналогичные приведенным в п. 2.2.3, приводят к выводу, что для этого  $\nabla B_0$  должен быть параллелен  $\mathbf{B}_0$ , т. е. должна осуществляться конфигурация магнитного берега [3] (см. также п. 2.2.1). В этом случае волновое уравнение, описывающее распространение альфвеновских колебаний, имеет вид

$$E_+'' - \frac{\omega \omega_i^2}{c^2 (\omega - \omega_i(z))} E_+ = 0. \quad (2.66)$$

Здесь считается  $q_i \gg 1$ . Обычно в термоядерных экспериментах это условие выполняется с большим запасом  $q_i \sim 10^3$ . Если в окрестности резонансной точки положить  $\omega_i(z) = \omega(1 - z/L)$ , то уравнение (2.66) приводится к уравнению, рассмотренному Бадденом, с параметром  $\Gamma = \infty$ . Отсюда следует вывод, что альфвеновские колебания, набегающие на точку циклотронного резонанса, поглощаются целиком. Генератор альфвеновских колебаний должен быть расположен в области, где  $\omega_i(z) > \omega$ , так как только эта область прозрачна для альфвеновских колебаний.

Резонансное взаимодействие магнитозвуковых колебаний с ионами слабое, и его можно учитывать в рамках метода последовательных приближений. В области частот  $\omega \sim \omega_i$  взаимодействие ослабляется из-за неблагоприятной поляризации колебаний  $E_{\parallel} \approx E_{\perp} \approx 0$  (см. п. 1.2.3). На основании соотношений (1.49), (1.50) с помощью метода, использованного в п. 2.2.3, нетрудно получить следующее выражение для величины  $\Gamma_M$ , определяющей коэффициент поглощения:

$$\Gamma_M = (\pi/2) N (L\omega/c)^2 \beta_i^2 q_i \sin^4 \theta \cos^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)^{-2} (2 \cos \theta \cos \psi + \sin \theta \cos \alpha \sin \psi).$$

Здесь для углов, характеризующих геометрию задачи, используются те же обозначения, что и в п. 2.2.3.

Резонанс на гармониках ионной циклотронной частоты удобно анализировать тем же методом, что и в п. 2.2.4, при этом получаем

$$\eta = \frac{L\omega}{8S_s} \frac{q_i}{n!} \left( \frac{1}{2} \xi_{Ti}^2 \right)^{n-1} |E_+|^2. \quad (2.67)$$

Здесь учтен лишь вклад составляющей электрического поля, вращающейся в ионную сторону, поскольку в низкочастотных колебаниях с  $\omega \approx n\omega_i$  продольное электрическое поле практически равно 0, а вклад составляющей, вращающейся в электронную сторону, содержит лишний малый множитель  $\sim \xi_{Ti}^4 \ll 1$ .

Выражение (2.67) можно использовать для описания резонансного взаимодействия магнитозвуковых и альфвеновских колебаний с малой добавкой ионов с другим значением ионной циклотронной частоты. В этом случае величины  $q_i$  и  $\xi_{Ti}$  в (2.67) характеризуют ионы примеси. Отметим, что если  $n=1$ , то в (2.67) выпадает малый множитель  $\xi_{Ti}^{2(n-1)}$ , что отражает высокую эффективность взаимодействия низкочастотных колебаний с ионами примеси.

## 2.3. Циклотронные колебания в немонотонно меняющемся магнитном поле

**2.3.1. Циклотронное резонансное взаимодействие в немонотонно меняющемся магнитном поле.** При резонансе в монотонно меняющемся магнитном поле во многих случаях можно было определить коэффициент поглощения колебаний без выяснения их детальной структуры в окрестности резонансной точки. Это удавалось сделать с помощью адиабатического волнового уравнения, дополненного правилом обхода Ландау. При немонотонном изменении магнитного поля такой подход, как мы сейчас увидим, вообще говоря, оказывается непригодным.

Предположим для определенности, что магнитное поле в некоторой точке  $z$  имеет минимум. При  $\omega > \min \omega_e(z)$  существуют две резонансные точки, симметрично расположенные относительно минимума магнитного поля. В этих точках производные  $d\omega_e/dz$  различны по знаку. Если для продолжения решения волнового уравнения через область минимума магнитного поля использовать адиабатическое волновое уравнение, то в соответствии с правилом обхода Ландау резонансные точки должны обходиться в комплексной плоскости с разных сторон (рис. 2.18). Следовательно, контур  $C$ , по которому продолжаем решение, должен обязательно пройти между резонансными точками. При  $\omega \rightarrow \min \omega_e(z)$  резонансные точки сближаются, и, когда расстояние между ними окажется меньше размера резонансной зоны, использование упрощенного адиабатического волнового уравнения станет невозможным. Полное волновое уравнение — интегральное (см. п. 2.1.3). Это уравнение до сих пор не применялось для анализа резонансного взаимодействия в окрестности экстремума магнитного поля. По существу удалось рассмотреть лишь слабое резонансное взаимодействие, влияние которого на распространение колебаний можно было учесть в рамках метода последовательных приближений как малую поправку. Такой подход использован в дальнейшем изложении, см. также [71].

Как и при анализе резонансного циклотронного взаимодействия в монотонно меняющемся магнитном поле (см. п. 2.1.2), рассмотрим сначала простейшие необыкновенные электронные циклотронные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля. Будем считать, что магнитное поле меняется по параболическому закону  $\omega_e(z) = \omega_{e0}(1 + (z/L_0)^2)$ . Скорость ларморовского вращения электрона, как и выше, будем характеризовать величиной  $v_-(t) = v_x(t) - iv_y(t) = v_{\perp} \exp[i\varphi(t)]$ . Ее изменение, вызванное прохождением через минимум магнитного поля, находим из уравнения (2.5):

$$\Delta v_-(t) = - (eE_-/m_e) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp \left\{ -i\omega't' + i \int_t^{t'} dt'' \omega_e[z(t'')] \right\}. \quad (2.68)$$

Здесь  $\omega' = \omega - kv_{\parallel}$ ;  $z(t) = z_0 + v_{\parallel}t$ . Интервал интегрирования в (2.68) продолжен до  $t = \pm \infty$ , поскольку считаем  $\omega \approx \omega_{e0}$ , и, следовательно,



значение интеграла определяется малой окрестностью минимума магнитного поля.

При сделанных предположениях интеграл в (2.68) выражается через функцию Эйри:

$$\Delta v_{-}(t) = -\frac{eE_{-}}{m_e} \exp[-i\varphi(t) + i\Phi(0)] \times \\ \times \frac{2\pi}{\omega'^{1/3}} \left(\frac{L_0}{v_{\parallel}}\right)^{2/3} \text{Ai}\left(\left(\frac{L_0\omega'}{v_{\parallel}}\right)^{2/3} \frac{\omega_{e0} - \omega'}{\omega_{e0}}\right), \quad (2.69)$$

Здесь  $\Phi(0)$  — разность между фазой циклотронного вращения и фазой волны в момент прохождения электрона через минимум магнитного поля.

Функция Эйри экспоненциально затухает при положительных значениях аргумента и осциллирует при отрицательных. (Амплитуда осцилляций спадает по степенному закону с ростом частоты.) Аргумент функции Эйри отрицателен, если частота колебаний с учетом доплеровского сдвига превышает  $\omega_{e0}$ . Очевидно, что такие колебания могут резонансно взаимодействовать с ларморовским вращением электрона. Ввиду того что зависимость циклотронной частоты от продольной координаты  $z$  имеет вид параболы, резонансное условие выполняется в двух точках, расположенных симметрично относительно  $z=0$ . Если разность  $\omega' - \omega_{e0}$  достаточно велика  $\omega' - \omega_{e0} \gg (v_{\parallel}/L_0\omega)^{2/3}$ , то расстояние между резонансными точками значительно превышает размер резонансной зоны в окрестности каждой из точек (см. ниже) и их вклады в  $\Delta v_{-}$  можно рассчитывать так же, как и в случае монотонно меняющегося магнитного поля. Они складываются когерентно, т. е. с учетом фазы. Поэтому при определенном расстоянии между резонансными точками, когда разность  $\Phi(t_1) - \Phi(t_2)$  ( $t_{1,2}$  — моменты прохождения электрона через резонансные точки) равна  $(2k+1)\pi$ , суммарное изменение  $\Delta v_{-}$  обращается в нуль. Эти соображения поясняют вид асимптотики  $\Delta v_{-}$  при больших отрицательных значениях аргумента функции Эйри:

$$\Delta v_{-} \approx -\frac{eE_{-}}{m_e} 2\epsilon \exp[i\Phi(0)] \left(\frac{\pi L_0}{v_{\parallel}}\right)^{1/2} \frac{1}{(\omega'(\omega' - \omega_{e0}))^{1/4}} \times \\ \times \sin\left(\frac{2L_0}{3v_{\parallel}\omega'^{1/2}}(\omega' - \omega_{e0})^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.70)$$

При сопоставлении (2.70) с выражением для  $\Delta v_{-}$  в случае монотонно изменяющегося магнитного поля [см. (2.9)] необходимо учитывать соотношения  $d\omega_e/dz = \omega_{e0} 2z/L_0^2$ ;  $z_S = L_0 [(\omega' - \omega_{e0})/\omega_{e0}]^{1/2}$ .

С уменьшением частоты резонансные точки приближаются к минимуму магнитного поля, а размер резонансной зоны  $\sim |d\omega_e/dz|^{-1}$  возрастает. В конце концов резонансные зоны сливаются. Оценим значение  $z_S$ , при котором это происходит. С этой целью рассмотрим выражение для разности между фазой ларморовского вращения электрона и фазой волны, предположив, что выполняется усло-

вие  $\omega' = \omega_{e0}$ , т. е. что резонанс имеет место точно в минимуме магнитного поля,

$$\Phi(t) = \Phi(t_S) + (\omega_{e0} v_{\parallel}^2 / 3L_0^2)(t - t_S)^3.$$

Из этого выражения следует, что электрон выходит из состояния резонанса за время  $\delta t_S \approx [(3\pi/2)L_0^2/\omega_{e0}v_{\parallel}^2]^{1/3}$  и, следовательно на расстоянии  $\delta z_S \approx [(3\pi/2)v_{\parallel}L_0^2/\omega_{e0}]^{1/3}$  от минимума магнитного поля. Величину  $2\delta z_S$  естественно считать, с одной стороны, равной размеру резонансной зоны при резонансе в минимуме магнитного поля, а с другой — расстоянию между резонансными точками при  $\omega' > \omega_{e0}$ , на котором происходит слияние резонансных зон.

При  $\omega' = \omega_{e0}$  резонансное взаимодействие достигает наибольшей интенсивности. По порядку максимум  $|\Delta v_{-}|$  должен быть равен  $(eE_{-}/m_e)(L_0^2/\omega_{e0}v_{\parallel}^2)^{1/3}$ . Действительно, при  $\omega' = \omega_{e0}$  из (2.69) получаем

$$\Delta v_{-} = -\frac{eE_{-}}{m_e} \exp[i\Phi(0)] \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{1/6}} \left(\frac{L_0^2}{\omega_{e0}v_{\parallel}^2}\right)^{1/2}.$$

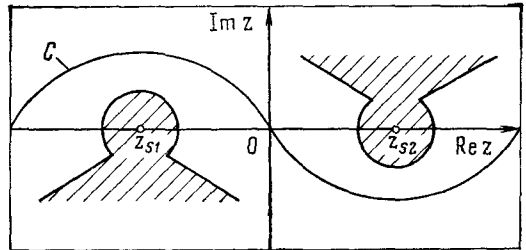
Существенно, что резонансное взаимодействие не прекращается, даже если  $\omega' < \omega_{e0}$ , и резонансное условие не выполняется ни при каком действительном значении  $z$ . В этом случае резонансное взаимодействие обусловлено эффектом конечности времени взаимодействия. Этот эффект рассматривался в п. 1.3.1, где анализировался механизм синхротронного излучения. Напомним, что эффект конечности времени взаимодействия обусловлен неспособностью частицы различить колебания, разность частот которых не превышает обратного времени взаимодействия. Благодаря этому эффекту электроны весьма эффективно взаимодействуют с колебаниями при  $\omega' < \omega_{e0}$ , если выполняется условие  $\omega_{e0} - \omega \leq (\delta t_S)^{-1} = \omega_{i0}^{1/3}(v_{\parallel}/L_0)^{2/3}$ . Эта оценка подтверждается видом асимптотики выражения (2.69) при больших положительных значениях аргумента функции Эйри:

$$\Delta v_{-} \approx -\frac{eE_{-}}{m_e} \exp[i\Phi(0)] \left(\frac{\pi L_0}{v_{\parallel}}\right)^{1/2} \frac{1}{(\omega'(\omega' - \omega_0))^{1/4}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{2L_0(\omega_{e0} - \omega')^{3/2}}{3v_{\parallel}\omega'^{1/2}}\right].$$

**2.3.2. Коэффициент поглощения.** Если частота колебаний удовлетворяет условию  $\omega' < \omega_{e0}$ , то резонансное взаимодействие обусловлено эффектами, связанными с тепловым движением электронов (эффект Доплера, эффект конечности времени взаимодействия). С уменьшением частоты интенсивность взаимодействия ослабевает и при достаточно больших значениях разности  $\omega_{e0} - \omega$  ко-

эффицент поглощения становится существенно меньше 1. В этой области частот для вычисления коэффициента поглощения можно пользоваться методом последовательных приближений, считая в первом приближении поле колебаний заданным (это предположение было сделано выше при вычислении  $\Delta v_-$ ). В плазме высокой плотности таким способом можно определить лишь «хвост» линии поглощения в области  $\omega < \omega_{e0}$ . Однако эта область наиболее интересна, так как именно в ней проявляется специфика резонансного взаимодействия в немонотонно изменяющемся магнитном поле. Поскольку при  $\omega < \omega_{e0}$  резонансное взаимодействие связано с эффектами теплового движения электронов, то коэффициент поглощения в этой области частот существенно зависит от температуры электронов и, следовательно, появляется возможность определения этой вели-

Рис. 2.18. Плоскость комплексного переменного  $z$  при немонотонной зависимости  $\omega_e(z)$ : Область, в которой неприменимо упрощенное адиабатическое волновое уравнение (2.17), заштрихована;  $C$  — контур обхода резонансных точек в соответствии с правилом Ландау; предполагается, что  $\omega > \omega_e(0)$



ны по измерениям коэффициента поглощения [71]. Напомним, что при резонансе в монотонно меняющемся магнитном поле коэффициент поглощения необыкновенных колебаний, распространяющихся вдоль поля, не зависит от температуры (см. п. 2.1.1).

При  $\eta \ll 1$  коэффициент поглощения можно определить по формуле  $\eta = \Delta \epsilon / S$ , где

$$\Delta \epsilon = n_0 \int dv_{\parallel} f_0(v) v_{\parallel} (m_e/2) |\Delta v_-|^2 \quad (2.71)$$

— количество энергии, поглощаемое электронами в единицу времени;  $S = (kc^2/4\pi\omega) |E_-|^2$  — поток энергии в колебаниях.

Из-за довольно сложной зависимости  $\Delta v_- (v_{\parallel})$  интеграл по  $dv_{\parallel}$  в (2.71) удастся вычислить, лишь сделав некоторые упрощающие предположения. Допустим сначала, что температура электронов достаточно высока [ $v_{Te} \gg c^{3/2} (\omega L_0)^{-1/2}$ ;  $c^{5/3} (\omega_{e0} - \omega)^{-5/6}$ ] и для значительной части электронов выполняется условие  $\omega + k |v_{\parallel}| > \omega_{e0}$  (рис. 2.19). В этом случае можно усреднить по быстрым осцилляциям величину  $|\Delta v_-|^2$  и использовать для нее следующее представление:

$$|\Delta v_-|^2 \approx \left( \frac{eE_-}{m_e} \right)^2 \frac{2\pi L_0}{v_{\parallel}} \frac{1}{|\omega'(\omega' - \omega_{e0})|^{1/2}} \theta \left( v_{\parallel} - \frac{\omega_{e0} - \omega}{k_{\parallel}} \right), \quad (2.72)$$

где  $\theta(x)$  — ступенчатая функция [ $\theta(x) = 1$  при  $x > 0$  и  $\theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ].

Подставляя (2.72) в (2.71) и учитывая, что интеграл по  $dv_{\parallel}$  определяется малой окрестностью значения  $v_{\parallel} = (\omega_{e0} - \omega)/k$ , получаем

$$\eta \approx \frac{\pi}{2^{1/2}} q_e \frac{\omega L_0}{c} |\Delta\Omega|^{-1/2} \exp\left(-\left(\frac{\Delta\Omega}{\beta_e}\right)^2\right), \quad (2.73)$$

где  $\Delta\Omega = (\omega - \omega_{e0})/\omega_{e0}$ .

Экспоненциальная зависимость коэффициента поглощения от  $\Delta\Omega$  отражает максвелловский закон распределения электронов по

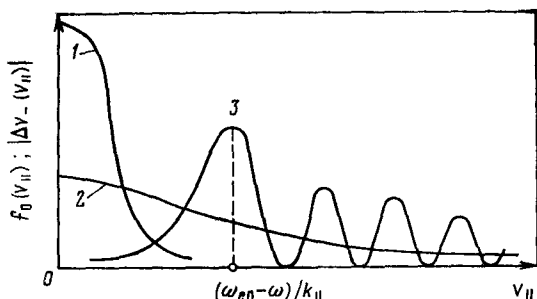


Рис. 2.19. Функция распределения электронов при низкой (1) и при высокой (2) температуре; 3 —  $|\Delta v_-(v_{\parallel})|^2$

скоростям. Действительно, при определяющем воздействии эффекта Доплера коэффициент поглощения пропорционален числу электронов с  $v_{\parallel} = (\omega - \omega_{e0})/k$ , т. е.  $\sim \exp(-(\Delta\Omega/kv_{Te})^2)$ . Отметим, что при  $\omega < \omega_{e0}$  с волной взаимодействуют электроны, движущиеся ей навстречу, для которых  $kv_{\parallel} = \omega - \omega_{e0} < 0$ .

В случае низкой температуры  $v_{Te} \ll c^{3/2}(\omega L_0)^{-1/2}(\Delta\Omega)^{5/6}$  число резонансных электронов мало (рис. 2.19) и резонансное взаимодействие обусловлено эффектом конечности времени взаимодействия. В этом случае интеграл в (2.71) можно вычислить методом перевала. В результате получается следующее выражение для коэффициента поглощения:

$$\eta \approx \frac{\pi}{2 \cdot 3^{1/2}} q_e \frac{\omega L_0}{c} |\Delta\Omega|^{-1/2} \exp\left[-12^{1/3} \left(\frac{\omega L_0}{v_{Te}}\right)^{2/3} |\Delta\Omega|\right]. \quad (2.74)$$

Волновое число необыкновенных колебаний, распространяющихся вдоль магнитного поля,

$$k(z) = (\omega/c) [1 + \omega^2_{pe}/\omega(\omega_e(z) - \omega)]^{1/2}$$

(см. п. 2.1.1). Выше при вычислениях коэффициента поглощения не учитывалась зависимость волнового числа от координаты. Между тем при  $\omega \approx \omega_{e0}$  такая зависимость может оказаться довольно существенной. Вычисления, проведенные с ее учетом, дают следующие

щие обобщения (2.73) и (2.74) соответственно:

$$\eta = \frac{\pi}{2^{1/2}} q_e \frac{\omega L_0}{c} \frac{[|\Delta\Omega| + (3/2)q_e]^{1/2}}{|\Delta\Omega| + q_e} \exp\left(-\frac{1}{\beta_e^2} \frac{|\Delta\Omega|^3}{|\Delta\Omega| + q_e}\right);$$

$$\eta = \frac{\pi}{2 \cdot 3^{1/2}} q_e \frac{\omega L_0}{c} \frac{1}{(|\Delta\Omega| + q_e)^{1/2}} \exp\left(-12^{1/3} \left(\frac{\omega L_0}{v_{Te}}\right)^{2/3} |\Delta\Omega|\right).$$

**2.3.3. Определение  $T_e$  и некоторых других параметров плазмы в адиабатических ловушках по циклотронному поглощению.** Выражения для коэффициента поглощения, полученные в предыдущем подразделе, показывают, что закон спада  $\eta$  с увеличением разности  $\omega_{e0} - \omega$  (показатель экспоненты) определяется температурой электронов. Это обстоятельство позволяет сравнительно просто определить  $T_e$  по измерениям зависимости  $\eta(\omega)$ . Такие измерения — относительные и поэтому для них не требуется предварительной калибровки излучателя и приемника, что значительно упрощает их. Напомним, что калибровка приемника требуется в распространенном методе измерения  $T_e$  по циклотронному излучению.

Следует отметить, что высокая интенсивность резонансного взаимодействия необыкновенных колебаний с  $\omega \approx \omega_e$ , распространяющихся вдоль магнитного поля, в некоторых случаях может помешать их использованию для диагностических целей. Дело в том, что при достаточно высокой плотности плазмы коэффициент поглощения таких колебаний приближается к 1 даже в области частот  $\omega < \omega_{e0}$ . В этом случае измерения коэффициента поглощения становятся малоинформативными — плазма превращается в черное тело. Для уменьшения коэффициента поглощения следует использовать колебания, распространяющиеся под углом к магнитному полю, или переходить на гармоники электронной циклотронной частоты [123]. Соответствующие вычисления проводились в приближении  $\eta \ll 1$ ,  $k = \text{const}$ . Приводить здесь громоздкие выражения, полученные в [123], не будем. Отметим лишь, что при распространении колебаний под углом  $\theta$  к магнитному полю, отличным от  $\pi/2$ , зависимость показателя экспонент от электронной температуры совпадает с (2.73), (2.74), а переход на высшие гармоники приводит к появлению дополнительного множителя  $(k_{\perp} \rho_{Te})^{2(n-1)}$  в выражениях для  $\eta$  (см. также п. 1.2.6). Если  $\theta = \pi/2$  (более точно  $\pi/2 - \theta \ll v_{Te}/c$ ), закон спада коэффициента поглощения с ростом  $\omega_{e0} - \omega$  определяется релятивистской зависимостью электронной циклотронной частоты от энергии электрона  $\eta \sim \exp[-(2/\beta_e^2)|\Delta\Omega|]$ , а малый множитель  $k_{\perp} \rho_{Te}$  входит в  $\eta$  в степени  $2n$  (обыкновенные колебания) и  $2(n+1)$  (необыкновенные колебания) (см. п. 1.2.7).

При измерениях электронной температуры направление зондирования следует выбирать с учетом реальной геометрии магнитного поля. Необходимо, чтобы резонансная точка была точкой двойного экстремума магнитного поля, рассматриваемого как функция расстояния вдоль  $\mathbf{B}_0$  и вдоль зондирующего луча. Действительно, если не выполняется первое условие, то имеет место резонанс в монотонно меняющемся магнитном поле, если же не выполняется второе, то изменение частоты зондирующих колебаний [что необходимо для определения профиля  $\eta(\omega)$ ] приводит лишь к смещению резонансной точки вдоль луча. При зондировании вдоль магнитного поля эти условия очевидным образом совпадают. В случае адиабатической ловушки при зондировании под углом к магнитному полю луч должен проходить через центр ловушки. В ловушке с  $\pi/V$  эта точка является точкой экстремума магнитного поля, в обычной ловушке — седловой точкой.

Помимо электронной температуры по коэффициенту поглощения циклотронных колебаний можно определить и некоторые другие параметры плазмы. В частности, если функция распределения отличается от максвелловской, то можно составить представление о характере такого отличия. В открытых магнитных ловушках не удерживаются электроны, продольная энергия которых превышает перепад амбиполярного потенциала от центра ловушки до ее периферии  $e\Delta\Phi_0$ . Если энергия электронов достаточно высока, то уширение линии поглощения в области  $\omega < n\omega_{e0}$  определяется эффектом Доплера. В этом случае коэффициент поглощения колебаний частоты  $\omega$  пропорционален числу электронов с  $v_{\parallel} = (n\omega_{e0} - \omega)/k_{\parallel}$ . Отсутствие электронов с  $v_{\parallel} > v_{\parallel}^0 = (2e\Delta\Phi_0/m_e)^{1/2}$  приводит к резкому падению коэффициента поглощения при  $n\omega_{e0} - \omega > k_{\parallel} v_{\parallel}^0$ .

Коэффициент поглощения на  $n$ -й гармонике циклотронной частоты пропорционален  $(k_{\perp} \rho_{Te})^m$ , где  $m = n, n \pm 1$ . Причем, если распределение электронов по скоростям анизотропно, ларморовский радиус следует рассчитывать по средней поперечной энергии электронов. Ее можно найти из сравнения коэффициентов поглощения на разных гармониках электронной циклотронной частоты.

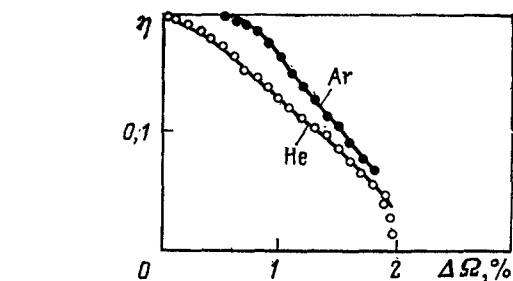


Рис. 2.21. Зависимость коэффициента поглощения  $\eta = 1 - \zeta$  от частоты  $[\Delta\Omega = (\omega_{e0} - \omega)/\omega]$  для Ar и He

Рис. 2.20. Получаемая в эксперименте зависимость коэффициента прохождения  $\zeta$  от магнитной индукции:

$B(t) = B_0 + B_g \cos \omega t$ ; правый край осциллограммы соответствует полному прохождению ( $\zeta=1$ ); масштаб по обеим осям линейный

В современных адиабатических ловушках электроны обычно имеют достаточно высокую температуру, так что их длина свободного пробега намного превышает размер системы. Поэтому все электроны, находящиеся на данной силовой линии магнитного поля, характеризуются одной температурой. В результате, несмотря на то что при  $\omega \approx \omega_{e0}$  колебания взаимодействуют с электронами лишь в малой окрестности минимума магнитного поля, измерения коэффициента поглощения  $\eta(\Delta\Omega)$  позволяют судить о температуре (функции распределения) всех электронов, движущихся по данной силовой линии.

Коэффициент поглощения циклотронных колебаний зависит не только от температуры электронов, но и от плотности плазмы в резонансной точке  $n_0(r_s)$ . [При достаточно низкой плотности он пропорционален  $n_0(r_s)$ ; с повышением плотности эта зависимость может усложниться — см. п. 2.2.1]. Поэтому, варьируя частоту колебаний и тем самым смещая резонансную точку по плазме, можно определить распределение плотности.

Такая диагностика была опробована сначала в модельных экспериментах с газоразрядной плазмой [71]. В этих экспериментах газовый разряд зажигался

в магнитном поле той же конфигурации, что и магнитное поле адиабатической ловушки. Газоразрядную трубку помещали в волновод и измеряли зависимость коэффициента прохождения колебаний через плазму от расстройки  $\omega_{e0} - \omega$ . На практике оказалось удобным, поддерживая частоту постоянной, менять магнитное поле по синусоидальному закону с такой амплитудой, чтобы изменение  $\delta\omega_{e0}$  перекрыло интересующий частотный интервал. Характерная осциллограмма, показывающая изменение коэффициента прохождения  $\xi$  от индукции поля, приведена на рис. 2.20. Теоретический анализ, а также прямые измерения коэффициента отражения  $\xi$  привели к выводу, что в условиях эксперимента [71] он мал по сравнению с коэффициентом поглощения  $\eta$ . Поэтому коэффициент поглощения рассчитывали по формуле  $\eta = 1 - \xi$ . Результаты обработки осциллограмм типа изображенной на рис. 2.20 приведены на рис. 2.21. Видно, что основная часть зависимости  $\lg \eta$  от  $\Delta\Omega$  ложится на прямую линию. Этого и следовало ожидать, поскольку в силу низкой температуры электронов газоразрядной плазмы ( $T_e = 1 \div 10$  эВ) «хвост» линии поглощения определяет эффект конечности времени резонансного взаимодействия [см. (2.74)]. Расчет по этой формуле дал результаты, хорошо согласующиеся с данными зондовых измерений.

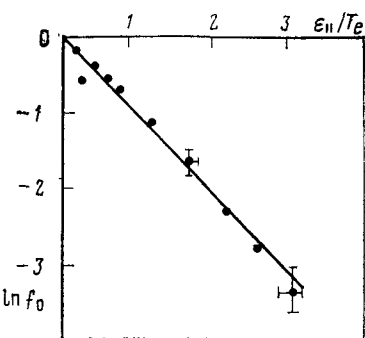


Рис. 2.22. Функция распределения электронов по продольной энергии

После успешного опробования диагностики на газоразрядной плазме ее использовали для определения температуры и функции распределения электронов в экспериментах на адиабатической ловушке ОГРА-ЗБ [124—126]. Низкая плотность плазмы в этих экспериментах затрудняла использование стандартных методик определения температуры по рассеянию лазерного излучения и по спонтанному циклотронному излучению. Поэтому для диагностики использовали необыкновенные циклотронные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля, коэффициент поглощения которых максимален (см. выше). Измерения дали довольно высокое значение температуры электронов ( $T_e \sim 100$  эВ), при котором зависимость  $\eta(\Delta\Omega)$  определяется эффектом Доплера. В этих условиях оказалось возможным проверить, действительно ли функция распределения электронов по скоростям максвелловская. Результаты проверки приведены на рис. 2.22 [125]. Видно, что максвелловский закон распределения соблюдается в интервале  $T_e < e < 3T_e$ . В [125] не удалось определить граничную энергию, за которой происходит обрезание функции распределения (см. выше), так как в соответствующей области частот коэффициент поглощения был слишком мал. В этих же экспериментах был определен и профиль плотности плазмы вдоль оси ловушки. Ввиду сравнительной простоты описываемых диагностик измерения удалось проводить непрерывно во времени. В результате были измерены флуктуации плотности и температуры, вызванные развитием неустойчивых колебаний с  $\omega \ll \omega_e$ .

**2.3.3. Квазистационарные колебания в немонотонно меняющемся магнитном поле.** Выше обсуждались эффекты, в которых проявлялась специфика резонансного циклотронного взаимодействия при минимуме магнитного поля, т. е. при  $\omega \approx n\omega_e$ . Однако немоно-

тонная зависимость магнитного поля от координат может приводить к довольно интересным результатам и в том случае, когда частота  $\omega$  существенно больше  $n\omega_{e0}$ . Рассмотрим опять необыкновенные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля. Их взаимодействие с плазмой описывается формулами Баддена. Используя аналогию между волновым уравнением и квантово-механическим уравнением Шредингера, можно получить наглядную интерпретацию результатов, полученных Бадденом (см. п. 2.2.1). Если магнитное поле изменяется немонотонно, эффективный потенциал в эквивалентном уравнении Шредингера образует яму (рис. 2.23). При  $\Gamma \gg 1$  коэффициент проникновения через стенки ямы

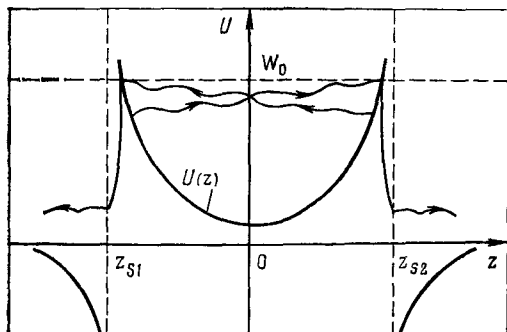


Рис. 2.23. Квазистационарные колебания в параболическом магнитном поле:

амплитуда колебаний в области прозрачности схематически показана волнистой линией;  $U(z) = \omega^2 p_e / c^2 (\omega - \omega_e(z))$  — эффективная потенциальная энергия в волновом уравнении (2.17);  $W_0 = (\omega/c)^2$  — эффективная полная энергия;  $z_{S1}$ ,  $z_{S2}$  — резонансные точки

экспоненциально мал  $\zeta = \exp(-\Gamma)$ . В этом случае в яме должны существовать квазистационарные уровни [127]. Действительно, колебания много раз пробегут между стенками ямы, прежде чем просочатся через барьер. При этом в яме образуется волна, слабо отличающаяся от стоячей, соответствующей обычным собственным колебаниям. В качестве квантово-механического аналога рассматриваемого явления можно указать квазистационарные уровни  $\alpha$ -частиц в атомном ядре.

Частота и декремент затухания рассматриваемых колебаний находятся, как обычно, из условия сопряжения «начальной» волны с волной, вернувшейся в «исходную» точку после прохождения по системе. Если выполняется условие  $\omega_{pe}/\omega_e \ll z_S/L_0$ , то вдали от резонансной зоны волна близка к плоской — вакуумной ( $k \approx \omega/c$ ), и для продолжения решения через точку циклотронного резонанса можно использовать асимптотику (2.28) с  $L = |(1/\omega_e) d\omega_e/dz|_{z=z_S}$ .

При этом в случае симметричной потенциальной ямы условие сопряжения принимает вид

$$[1 - \exp(-\Gamma)] \frac{(i\Gamma/2\pi)!}{(-i\Gamma/2\pi)!} \exp\left(2i \frac{\omega z_S}{c} - i \frac{\Gamma}{\pi} \ln\left(\frac{2\omega z_S}{c}\right)\right) = \pm 1. \quad (2.75)$$

При  $\Gamma \gg 1$  из (2.75) находим приближенное выражение для декремента затухания колебаний

$$\gamma \approx (c/2z_S) \exp(-\Gamma).$$



Спектр собственных частот имеет вид  $\omega \approx (n\pi/2) c/z_s$ . Если при облучении ловушки электромагнитными колебаниями их частота совпадает с одной из собственных частот, то вследствие резонанса амплитуда колебаний внутри ловушки превышает амплитуду во внешней области в  $\exp(\Gamma/2)$  раз.

### 3. Циклотронные колебания в ограниченных системах

#### 3.1. Циклотронный нагрев в регулярных колебаниях. Возникновение стохастичности

**3.1.1. Введение.** В гл. 2 при исследовании резонансного циклотронного взаимодействия в неоднородном магнитном поле считали, что на резонансную точку из «бесконечности» набегают невозмущенный волной поток заряженных частиц. Однако в реальных, ограниченных системах заряженные частицы совершают возвратно-поступательное движение вдоль магнитного поля, причем обычно за время жизни в системе каждая частица много раз проходит через резонансную точку. Возникает вопрос: законно ли каждый акт резонансного взаимодействия рассматривать независимо от предшествующих? С этим вопросом, как показано ниже, тесно связаны два других: о возможности нагрева плазмы регулярными колебаниями и о потерях плазмы из адиабатических ловушек под действием самопроизвольно возникающих регулярных циклотронных колебаний.

Для того чтобы каждый акт резонансного взаимодействия не зависел от предшествующих, на первый взгляд необходимо, чтобы какие-то внешние случайные воздействия разрушили фазовую память частиц за время, меньшее периода колебаний вдоль магнитного поля. Представляется, что без случайных воздействий невозможен и нагрев частиц в регулярных колебаниях. Действительно, под словом «нагрев» обычно подразумевают усиление теплового (хаотического) движения, между тем как при отсутствии случайных воздействий движение заряженных частиц под действием электромагнитных колебаний полностью детерминировано. (Вообще говоря, мыслимо и непрерывное, детерминированное увеличение энергии частиц под действием колебаний. Однако, как показано ниже, в реальных системах с неоднородным магнитным полем доля частиц, которые могут быть нагреты таким образом, весьма мала.) Если бы удалось показать, что движение частиц под действием регулярных колебаний может стать стохастичным, это имело бы принципиальное значение для обеих указанных выше проблем (нагрев плазмы регулярными циклотронными колебаниями и потери частиц из адиабатических ловушек под действием самопроизвольно возникающих циклотронных колебаний). Поясим вкратце последнюю проблему. Как известно, удержание заряженных частиц в адиабатических ловушках возможно лишь в той мере, в какой сохраняется так называемый поперечный адиабатический инвариант  $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ . Но в адиабатических ловушках удерживаются лишь частицы с достаточно большим  $\mu$ , по-

этому распределение частиц по скоростям термодинамически неравновесно. Неравновесность приводит к самопроизвольному возбуждению циклотронных колебаний — циклотронной неустойчивости. Встает вопрос: как влияют циклотронные колебания на поперечный адиабатический инвариант? Если действие циклотронных колебаний приводит лишь к модификации адиабатического инварианта, то частицы по-прежнему удерживаются в адиабатической ловушке. (Согласно [128] движение с модифицированным поперечным адиабатическим инвариантом принято называть суперадиабатическим.) Если же движение принимает хаотический характер и инвариант перестает существовать, то происходит развал плазмы.

Анализ возникновения стохастичности под действием циклотронных колебаний, генерируемых внешним источником (проблема циклотронного нагрева) и возбуждающихся самопроизвольно (проблема удержания частиц в адиабатических ловушках), производился примерно в одно и то же время [127—135]. Он основывался на общей теории возникновения стохастичности в динамических системах. Согласно современным воззрениям стохастичность является следствием неустойчивости траекторий, описывающих поведение динамических систем в фазовом пространстве. Эта неустойчивость приводит к тому, что фазовые траектории, первоначально расположенные близко друг к другу (различающиеся микроскопически), в конце концов расходятся на большое (макроскопическое) расстояние. Поскольку в реальных системах внешние случайные воздействия неустраняемы принципиально, то поведение неустойчивых систем на достаточно больших интервалах времени становится непредсказуемым. Одна из моделей возникновения неустойчивости траекторий в фазовом пространстве развита Б. Н. Чириковым и Г. М. Заславским [136—139]. В ее основе лежит так называемое явление перекрытия резонансов. Содержание этого понятия раскрыто в дальнейшем изложении. Пока же поясним, о каких резонансах будет идти речь в интересующем нас случае.

Выше отмечалось, что в ограниченных системах заряженные частицы помимо ларморовского вращения совершают периодическое движение вдоль магнитного поля — в адиабатических ловушках колеблются между пробками, в токамаках вращаются по большому азимуту и т. д. Поскольку продольное движение периодическое, то каждый из циклотронных резонансов  $\omega = n\omega_j$  разбивается на бесконечное число баунс-резонансов  $\omega = n\omega_j + p\omega_{bj}$ ,  $p = 1, 2, 3 \dots$ , где  $\omega_{bj}$  — частота периодического движения заряженной частицы вдоль магнитного поля (баунс-частота). Стохастичность возникает, когда под действием электромагнитного поля циклотронных колебаний «перекрываются» баунс-резонансы. В этой главе проанализировано движение заряженных частиц в адиабатических ловушках в присутствии циклотронных колебаний. Распространение теории на случай других систем не представляет большого труда.

Математическую модель, на которой Б. Н. Чириков и Г. М. За-

славский изучали явление возникновения стохастичности, можно без каких-либо изменений перенести в теорию циклотронных колебаний в ограниченных системах. Поэтому результаты, полученные Б. Н. Чириковым и Г. М. Заславским, могут быть интерпретированы в терминах этой теории, а благодаря такой связи некоторые положения теории циклотронных колебаний приобретают более общее значение. Так, результаты анализа совместного воздействия циклотронных колебаний малой амплитуды и случайных возмущений на движение заряженных частиц в ограниченных системах [127] могут быть использованы для изучений широкого класса динамических систем, подвергающихся случайным воздействиям. В общей постановке этот вопрос рассмотрен в [140, 141].

**3.1.2. Гамильтониан электрона.** Многопериодическое движение, каким является движение электрона в адиабатической ловушке, удобно анализировать в рамках гамильтонова формализма. При таком подходе решение уравнений движения заменяется цепочкой канонических преобразований.

Гамильтониан электрона, движущегося в статическом магнитном поле при наличии электромагнитных колебаний, имеет вид

$$H = \frac{1}{2m_e} \left[ \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) - \frac{e}{c} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) \right]^2, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{P}$  — обобщенный импульс и  $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t)$  — вектор-потенциал статического магнитного поля и электромагнитных колебаний соответственно. Чтобы не загромождать анализ несущественными деталями, рассмотрим интересующую нас задачу в простейших условиях. Наиболее простое магнитное поле, образующее «адиабатическую ловушку», имеет вид  $\mathbf{B}_0 = B_0(rz/L_0^2; 0; 1 + (z^2 + r^2/2)/L_0^2)$ . Здесь используется цилиндрическая система координат, коаксиальная с рассматриваемой системой. Такому магнитному полю соответствует вектор-потенциал  $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = (0, (r/2)(1 + (z^2 + r^2/4)/L_0^2), 0)$ . Электрическое поле циклотронных колебаний будем считать однородным, направленным поперек основного магнитного поля и вращающимся в электронную сторону.

Прежде всего выделим в гамильтониане (3.1) часть, учитывающую электромагнитное поле циклотронных колебаний. Это достигается с помощью канонического преобразования, описываемого производящей функцией

$$F_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{r} - (e/c) \int^r dr' \mathbf{A}_1(\mathbf{r}', t). \quad (3.2)$$

При этом гамильтониан принимает вид

$$H = (1/2m_e) [\mathbf{P}_1 - (e/c) \mathbf{A}_0(\mathbf{r})]^2 + e \int^r dr' \mathbf{E}(\mathbf{r}', t), \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P} + (e/c) \mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t)$  — новый обобщенный импульс;  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - (1/c) \partial \mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) / \partial t$  — электрическое поле циклотронных колебаний. Первое слагаемое в (3.3) можно интерпретировать как кинетическую энергию электрона, движущегося в статическом маг-

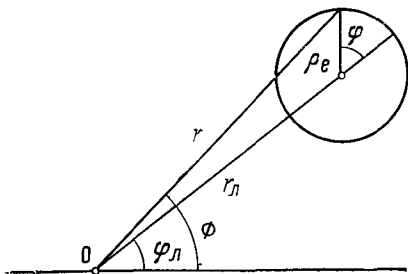


Рис. 3.1. Геометрическая интерпретация преобразований (3.4)

ними сказывается в нелинейных задачах (см. ниже). Отметим, что при отсутствии стационарного магнитного поля преобразование, определяемое (3.2), соответствовало бы переходу от обобщенного импульса к обычному.

Предположим, что электромагнитные колебания имеют электронную поляризацию, причем электрическое поле не зависит от  $\mathbf{r}$ . В этом случае последнее слагаемое в гамильтониане (3.3) принимает вид

$$H_1 = eE_-(x \cos \omega t + y \sin \omega t),$$

где  $E_-$  — амплитуда электрического поля.

Теперь, следуя [144] (см. также [142]), введем канонические переменные для ларморовского вращения. Такими переменными являются фаза вращения  $\varphi$  и переменная действия  $J_{\perp} = \varepsilon_{\perp} / \omega_e = \mu m_e c / e$ , где  $\mu$  — магнитный момент. Преобразование, предложенное в [142], отделяет ларморовское вращение от движения ларморовского центра, которое характеризуется своими каноническими переменными  $\varnothing_{\perp}$  и  $J_{\perp}$ . В приближении мелкой магнитной ямы  $|z| \ll L_0$  и малого ларморовского радиуса  $\rho_e \approx (2J_{\perp} / m_e \omega_{e0})^{1/2} \ll r \approx r_{\perp} \approx (2J_{\perp} / m_e \omega_{e0})$  формулы, связывающие старые и новые переменные, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} P_{1r} &= (2m_e \omega_{e0} J_{\perp})^{1/2} \sin \varphi; \\ P_{1\varnothing} &= -J_{\perp}; \\ r &= (2/m_e \omega_{e0})^{1/2} (J_{\perp}^{1/2} + J_{\perp}^{1/2} \cos \varphi); \\ \varnothing &= -\varnothing_{\perp} + (J_{\perp} / J_{\perp})^{1/2} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Они могут быть получены с помощью производящей функции

$$F_2 = \int dr (m_e \omega_{e0})^{1/2} (2J_{\perp} - (r(m_e \omega_{e0})^{1/2} - (2J_{\perp})^{1/2})^2)^{1/2} - \varnothing J_{\perp}.$$

Геометрический смысл преобразований (3.4) поясняется рис. 3.1.

В новых переменных для гамильтониана (3.3) получаем следующее выражение:

$$H = p_z^2/2m_e + \omega_{e0}J_{\perp}(1 + z^2/L_0^2) + eE_{-}(2J_{\perp}/m_e\omega_{e0})^{1/2} \times \\ \times \cos(\varphi - \varnothing_{\perp} - \omega t). \quad (3.5)$$

Это выражение — приближенное. В нем опущены как слагаемые, описывающие медленное — дрейфовое движение ларморовского центра, так и его быстрые осцилляции, происходящие с циклотронной частотой.

Теперь введем канонические переменные для продольного движения. Из (3.5) следует, что оно представляет собой гармонические осцилляции с частотой  $\omega_b(J_{\perp}) = (2\omega_{e0}J_{\perp}/m_eL_0^2)^{1/2}$ :

$$\left. \begin{aligned} z &= L_0(\omega_b J_{\parallel} / \omega_{e0} J_{\perp})^{1/2} \sin \theta_{\parallel}; \\ p_z &= (2m_e \omega_b J_{\parallel})^{1/2} \sin \theta_{\parallel}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

где  $J_{\parallel} = (1/2\pi) \oint p_z dz$ ;  $\dot{\theta}_{\parallel} = \omega_b$ .

Производящая функция, описывающая переход к каноническим переменным  $J_{\parallel}$ ,  $\theta_{\parallel}$ , имеет вид  $F_3 = \varphi J_{\perp} + \int^z dz' p_z(z', J_{\parallel}, J_{\perp})$ . Существенно, что при таком преобразовании изменяется и фаза, соответствующая  $J_{\perp}$ ,  $\varphi \rightarrow \theta_{\perp}$ :

$$\theta_{\perp} = \partial F_3 / \partial J_{\perp} = \varphi + (J_{\parallel} / 4J_{\perp}) \sin 2\theta_{\parallel},$$

где

$$\dot{\theta}_{\perp} = \Omega_{\perp} = \partial H_0 / \partial J_{\perp} = \omega_{e0} + (1/2)(J_{\parallel} / J_{\perp}) \omega_b(J_{\perp}).$$

Новая фаза  $\theta_{\perp}$  описывает ларморовское вращение, усредненное по продольным осцилляциям. Действительно, частота  $\Omega_{\perp}$  может быть представлена в виде

$$\Omega_{\perp} = \omega_{e0} [1 + (1/2)(z_m/L_0)^2] = \omega_{e0} [1 + (1/2)(v_{\parallel 0}/v_{\perp 0})^2],$$

где  $z_m = L_0(\omega_b J_{\parallel} / \omega_{e0} J_{\perp})^{1/2}$  — размах колебаний электрона вдоль магнитного поля;  $v_{\parallel 0} = (2\omega_{e0} J_{\parallel} / m_e)^{1/2}$  — продольная скорость в минимуме магнитного поля.

Окончательно для гамильтониана получаем следующее выражение:

$$H = \omega_{e0} J_{\perp} + \omega_b(J_{\perp}) J_{\parallel} + eE_{-}(2J_{\perp}/m_e\omega_{e0})^{1/2} \times \\ \times \cos(\theta_{\perp} - q \sin 2\theta_{\parallel} - \omega t). \quad (3.7)$$

Здесь в аргументе косинуса опущен несущественный фазовый сдвиг  $\varnothing_{\perp}$  и обозначено  $q = J_{\parallel} / 4J_{\perp}$ .

**3.1.3. Возникновение стохастичности.** Перейдем теперь к анализу движения, описываемого гамильтонианом (3.7). Если амплитуда электрического поля достаточно мала, то последнее слагаемое в (3.7) можно учесть в качестве малой поправки. Его влияние сказывается лишь в слабом дрожании фазовой траектории. Положение, однако, меняется при выполнении резонансного условия

$$\Omega_{\perp}(J_{\perp}, J_{\parallel}) - 2p\omega_b(J_{\perp}) - \omega = 0. \quad (3.8)$$

В этом случае у возмущения появляется секулярная составляющая, под влиянием которой фазовые траектории могут существенно исказиться. Чтобы рассмотреть движение в резонансной области, разложим, используя (1.2), возмущение в ряд Фурье по  $\theta_{\perp} - \omega t$  и  $\theta_{\parallel}$  и из всего разложения оставим лишь резонансный член. Эта процедура соответствует усреднению по малым колебаниям, вызываемым нерезонансными слагаемыми. Затем с помощью производящей функции  $F_4 = (\theta_{\perp} - \omega t - 2p\theta_{\parallel})J_{\perp} + \theta_{\parallel}P_{\parallel}$  введем новые переменные  $\Phi^{(p)} = \theta_{\perp} - \omega t - 2p\theta_{\parallel}$  и  $P_{\parallel} = J_{\parallel} + 2pJ_{\perp}$ . При этом гамильтониан (3.7) принимает вид

$$H = J_{\perp}(\omega_{e0} - \omega) + (P_{\parallel} - 2pJ_{\perp})\omega_b(J_{\perp}) + \frac{eE_{-}}{\omega} \left( \frac{2J_{\perp}\omega_{e0}}{m_e} \right)^{1/2} \times \\ \times I_p \left( \frac{P_{\parallel} - 2pJ_{\perp}}{4J_{\perp}} \right) \cos \Phi^{(p)}, \quad (3.9)$$

где  $J_p$  — функция Бесселя  $p$ -го порядка.

Следуя [138], разложим невозмущенную часть гамильтониана по малой разности  $P^{(p)} = J_{\perp} - J_{\perp p}$ , где  $J_{\perp p}$  удовлетворяет резонансному условию (3.8). В возмущенной части положим  $J_{\perp} = J_{\perp p}$ . Опуская в (3.9) несущественные постоянные слагаемые, приводим гамильтониан к стандартному виду

$$H = A_1 P^{(p)2} + A_2 \cos \Phi^{(p)}, \quad (3.10)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dJ_{\perp}^2} \Big|_{J_{\perp} = J_{\perp p}}; \\ A_2 = \frac{eE_{-}}{\omega} \left( \frac{2\omega_{e0}J_{\perp p}}{m_e} \right)^{1/2} J_p \left( \frac{P_{\parallel} - 2pJ_{\perp p}}{4J_{\perp p}} \right).$$

Гамильтонианы вида (3.10) описывают колебания маятника в поле силы тяжести, движение заряженной частицы в пространственно-периодическом электрическом поле и т. д. Здесь не будем приводить хорошо известные выражения для траектории  $[P^{(p)}(t), \Phi^{(p)}(t)]$  [27, 137]. Чтобы напомнить, каким будет общий характер движения, используем фазовую плоскость  $P^{(p)}, \Phi^{(p)}$  (рис. 3.2).

Видно, что в окрестности резонансных значений  $J_{\perp}$  расположены так называемые захваченные траектории, на которых фаза  $\Phi^{(p)}$  изменяется в ограниченных пределах. Эти траектории описывают колебательное движение. Максимальный размах колебаний по оси  $J_{\perp}$  равен  $\Delta J_{\perp} = 2|2A_2/A_1|^{1/2}$ . Вдали от резонансных значений  $J_{\perp}$  лежат так называемые пролетные траектории, на которых фаза  $\Phi^{(p)}$  изменяется неограниченно. Такое движение соответствует вращению маятника.

Рисунок 3.2 соответствует случаю достаточно малого возмущения, когда размах колебаний  $\Delta J_{\perp} = \Delta P^{(p)}$  мал по сравнению с расстоянием между соседними резонансами  $\delta J_{\perp} \approx |\omega_b/A_1|$ . Что произойдет, когда с увеличением электрического поля волны  $E \sim A_2$  размах

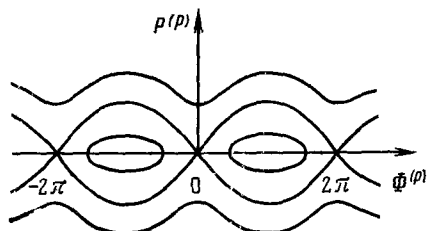


Рис. 3.2. Фазовые траектории, описываемые гамильтонианом (3.15) в режиме регулярного движения (слабое электрическое поле)

колебаний  $\Delta J_{\perp}$  превысит расстояние между соседними резонансами  $\delta J_{\perp}$ ? Центральным пунктом теории Б. Н. Чирикова и Г. М. Заславского является утверждение, что в этом случае движение изображающей точки по фазовой плоскости станет неустойчивым, а именно весьма малые различия в начальных условиях приводят к тому, что изображающие точки, переходя от одного резонанса к другому, в конце концов расходятся на значительное расстояние. В соответствии со сказанным выше это означает, что поведение реальной системы, описываемой данным гамильтонианом, становится непредсказуемым — случайным. Теория Б. Н. Чирикова и Г. М. Заславского имеет эвристический характер, однако она неоднократно подтверждалась численными экспериментами (см., например, [138, 139] и приведенные там ссылки).

Условие возникновения стохастичности\*  $\Delta J_{\perp} > \delta J_{\perp}$  можно представить в виде

$$(eE_{\perp} L_0 / \omega) |J_p(q)| > J_{\perp}^2 |8\rho J_{\perp} + J_{\parallel}|^{-1}, \quad (3.11)$$

где величина  $\rho$ , определяемая из резонансного условия (3.8), равна  $\rho = (1/2)(\omega - \omega_{z0})/\omega_{e0} + q$ . Чтобы представить условие стохастичности более наглядно, рассмотрим частный случай колебаний

\* Это условие обеспечивает перекрытие наиболее «грубых» резонансов первого порядка. Учет высших резонансов облегчает возникновение стохастичности, приводя к условию  $\Delta J_{\perp} \geq (2/\pi)\delta J$  [139].

с  $\omega = \omega_{e0}$  при  $p = q \gg 1$ . Используя асимптотику функции Бесселя  $J_p(p) \approx \Gamma(1/3) (3^{1/6} 2^{2/3} \pi p^{1/3})^{-1}$ , приводим (3.11) к виду

$$\frac{3^{5/6} \Gamma(1/3)}{\pi} \left( \frac{L_0 \omega}{v_{\perp 0}} \right)^{2/3} \left( \frac{v_{\parallel 0}}{v_{\perp 0}} \right)^{4/3} \frac{e E_{\perp} L_0}{m_e v_{\perp 0}^2} > 1. \quad (3.12)$$

Физическая интерпретация условия стохастичности дана в следующем подразделе. Здесь же постараемся взглянуть на явление возникновения стохастичности с позиций, более привычных для физики плазмы, а именно рассмотрим уравнение квазилинейной диффузии электронов, движущихся в магнитной ловушке ( $B(z) = B_0(1+z^2/L_0^2)$ ) и испытывающих воздействие со стороны циклотронных колебаний. Соответствующее уравнение получено в приложении П.5 (см. также [145, 146]); оно имеет вид

$$\partial f / \partial t + LD\hat{L}f = 0, \quad (3.13)$$

$$\text{где } \hat{L} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\perp 0}} + \frac{\omega - \omega_{e0}}{\omega} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\parallel 0}};$$

$$D = 4\pi (ev_{\perp} E_{\perp})^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p^2(q) \delta(\omega - \Omega_{\perp} \pm 2p\omega_b). \quad (3.14)$$

В (3.13) используются переменные  $\epsilon_{\perp 0}$  и  $\epsilon_{\parallel 0}$  для того, чтобы придать уравнению более компактный вид.

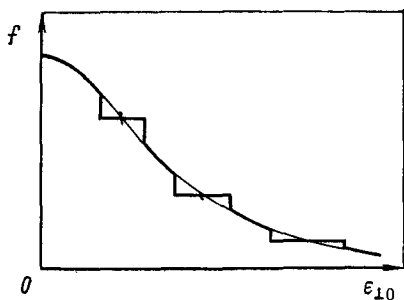


Рис. 3.3. Образование плато на функции распределения электронов под действием монохроматической волны малой амплитуды

Из (3.13) следует, что в силу колебаний электронов в магнитной яме одна волна с фиксированной частотой действует на них так же, как целый спектр волн с частотами  $\omega_p = \omega - 2p\omega_b$  и амплитудами  $E_p = E - J_p(q)$ . Хорошо известно, что отдельная монохроматическая волна выравнивает функцию распределения (образует плато) в области захваченных частиц. В данном случае образуется дискретная последовательность плато (рис. 3.3).

На этом рисунке изображено сечение функции распределения  $f(\epsilon_{\perp 0}, \epsilon_{\parallel 0})$  при некотором фиксированном значении  $\epsilon_{\parallel 0}$ . С увеличением амплитуды электрического поля размеры плато возрастают, и, когда соседние плато перекроются, по всей области перекрытия пойдет квазилинейная диффузия. Такой режим соответствует режиму стохастического движения, описанному выше.



Для дальнейшего заметим, что хотя уравнение квазилинейной диффузии получено усреднением по колебаниям электрона вдоль магнитного поля, оно отражает тот фактор, что резонансное взаимодействие происходит в точке  $z_S$ , где  $\omega = \omega_e(z_S)$ . Действительно, в силу соотношения  $\epsilon_{\parallel 0} = (1/2) m_e (v_{\parallel}^2 + v_{\perp 0}^2 (z/L_0)^2)$  полная производная  $d/d\epsilon_{\perp 0}$  равна  $d/d\epsilon_{\perp 0} = \partial/\partial\epsilon_{\perp 0} + (z/L_0)^2 \partial/\partial\epsilon_{\parallel 0}$ . (Напомним, что рассматривается движение в мелкой яме, когда  $z \ll L_0$  и  $\epsilon_{\perp} \approx \epsilon_{\perp 0}$ .) Поскольку точка  $z$ , в которой происходит изменение  $\epsilon_{\parallel 0}$ , совпадает с резонансной, то оператор  $\hat{L}$ , входящий в (3.13), можно представить в виде  $\hat{L} = d/d\epsilon_{\perp 0}$ .

**3.1.4. Импульсное приближение.** При анализе взаимодействия заряженных частиц, движущихся в неоднородном магнитном поле, с циклотронными колебаниями часто используют импульсное приближение [127, 129, 131, 132, 145, 146]. В этом приближении принимается, что электрическое поле колебаний действует на заряженные частицы импульсно — лишь в момент прохождения через резонансную точку. Движение в остальное время считается свободным. По существу анализ резонансного взаимодействия в § 2.1, 2.3 проводился в рамках импульсного приближения.

Очевидно, что в случае заряженных частиц, движущихся в магнитной яме, импульсное приближение можно использовать, если размах колебаний частиц вдоль магнитного поля  $l = v_{\parallel 0} / \omega_b$  значительно превышает размер резонансной зоны  $\delta z_S$ . Величина  $\delta z_S$  максимальна при резонансе в минимуме магнитного поля  $\delta z_S \approx (6\pi v_{\parallel 0} L_0^2 / \omega_{e0})^{1/3}$ . Интересно, что условие  $l \gg \delta z_S$  по порядку совпадает с условием  $J_{\parallel} \gg J_{\perp}$ , т. е. означает, что аргумент функций Бесселя  $J_p(q)$  значительно превышает 1. Последнее необходимо для возникновения стохастичности. Действительно, в обратном предельном случае  $q \ll 1$  функции Бесселя быстро спадают с ростом номера  $p$ :  $J_p(q) \approx (1/p!)(q/2)^p$ . Поэтому явление перекрытия резонансов в широком интервале изменения  $p$  становится невозможным.

Таким образом, приходим к заключению, что для возникновения стохастичности помимо достаточно большой амплитуды электрического поля необходимо, чтобы электроны совершали достаточно большие экскурсии вдоль магнитного поля ( $l \gg \delta z_S$ ).

Центральным пунктом анализа резонансного взаимодействия в импульсном приближении является расчет приращения энергии заряженной частицы при ее прохождении через резонансную зону. Получим общее выражение для этой величины в случае, когда заряженные частицы (электроны) удерживаются в магнитной яме — адиабатической ловушке. Для колебаний с электронной поляризацией из уравнения движения (2.5) получаем

$$\Delta v_{-}(t) = - (eE_{-}/m_e) \exp[-i\varphi(t)] \times \int_{-\pi/2\omega_b}^{\pi/2\omega_b} dt' \exp[-i\omega t' + i\varphi(t')], \quad (3.15)$$

где  $\varphi(t') = \int dt'' \omega_e [z(t'')] = \omega_{e0} [1 + (1/2)v_{\parallel 0}^2/v_{\perp 0}^2] t - q \sin(2\omega_b t)$ .

В (3.15) интегрирование проводится по половине периода колебаний электрона вдоль ловушки. За это время электрон один раз проходит через резонансную точку. [Если выполняется условие  $\omega - \omega_{e0} \gg \omega_{e0}^{1/3} (v_{\parallel 0}/L_0 \omega)^{2/3}$  — то через две резонансные точки, расположенные симметрично относительно минимума магнитного поля.] При  $q \gg 1$  для любых значений индекса  $p$ , в том числе и нецелых, можно использовать представление

$$J_p(q) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} dt \exp(-ipt + iq \sin t). \quad (3.16)$$

(При нецелом  $p$  оно приближенное [14].) С помощью (3.16) величину  $\Delta v_{-}$  можно представить в виде  $\Delta v_{-}(t) = -\Delta v_{\perp} \exp[i\Phi(0) - i\varphi(t)]$ , где

$$\Delta v_{\perp} = \frac{eE_{-}(0)}{m_e} \frac{\pi L_0}{v_{\perp 0}} J_{p^*}(q), \quad (3.17)$$

а индекс функции Бесселя  $p^*$  равен:

$$p^* = q - \frac{\omega - \omega_{e0}}{2\omega_b} = \frac{1}{2\omega_b} \left[ \omega_{e0} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v_{\parallel 0}^2}{v_{\perp 0}^2} \right) - \omega \right].$$

Выражение (3.16) можно получить, если считать, что электрон находится в состоянии резонанса в течение времени  $\delta t_S = (\pi/\omega_b) \times J_{p^*}(q)$ . Соответственно размер резонансной зоны

$$\delta z_S = (\pi v_{\parallel S}/\omega_b) J_{p^*}(q), \quad (3.18)$$

где  $v_{\parallel S}$  — продольная скорость электрона в резонансной точке.

Покажем, следуя [145], что выражения для  $\delta z_S$  приводившиеся ранее в пп. 2.1.2, 2.3.1, есть частные случаи (3.18). Для этого воспользуемся асимптотиками функции Бесселя [39]:

$$J_p(q) \approx \begin{cases} \left(\frac{2}{p}\right)^{1/3} \text{Ai}\left(\left(\frac{2}{p}\right)^{1/3}(p-q)\right) \approx \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi^{1/2}} \left(\frac{2}{p(q-p)}\right)^{1/4} \sin\left[\frac{2^{3/2}}{3p^{1/2}}(q-p)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right], \quad q > p; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{1/3} 2^{2/3} \pi p^{1/3}}, \quad q = p; \\ \frac{1}{\pi^{1/2}} \left(\frac{2}{p(p-q)}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{2^{3/2}}{3p^{1/2}}(p-q)^{3/2}\right], \quad q < p; \end{array} \right. \end{cases} \quad (3.19)$$

$$J_p(q) \Big|_{|p-q| \sim p} \approx \begin{cases} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(q^2 - p^2)^{1/4}} \cos \left( p \arccos \left( \frac{p}{q} \right) - \right. \\ \left. - (q^2 - p^2)^{1/2} + \frac{\pi}{4} \right), & q > p; \\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{(p^2 - q^2)^{1/4}} \exp \left[ (p^2 - q^2)^{1/2} - \right. \\ \left. - \frac{p}{2} \ln \left( \frac{p + (p^2 - q^2)^{1/2}}{p - (p^2 - q^2)^{1/2}} \right) \right], & q < p. \end{cases} \quad (3.20)$$

Нетрудно видеть, что при резонансе в окрестности минимума магнитного поля, когда выполняется условие  $|(\omega - \omega_{e0})/\omega_{e0}| \ll \ll v_{\parallel 0}^2/v_{\perp 0}^2$  ( $|p^* - q| \ll p^*$ ), выражение (3.17) согласуется с (2.69), а (3.18) при  $\omega = \omega_{e0}$  совпадает с выражением для  $\delta z_S$ , приведенным в п. 2.3.1.

Если  $\omega > \omega_{e0}$ , причем  $\omega - \omega_{e0} \gg \omega^{1/3} (v_{\parallel 0}/L_0)^{2/3}$ , то при сопоставлении с п. 2.1.2 необходимо учесть, что имеются две резонансные зоны, расположенные симметрично относительно минимума магнитного поля. Их вклады в  $\Delta v_{-}$  взаимно интерферируют. В результате  $\Delta v_{-} = 2\Delta v'_{-} \cos[(1/2)\Phi']$ , где  $\Delta v'_{-}$  — изменение энергии в каждой из зон;  $\Phi'$  — набег фазы  $\Phi$  за время прохождения между резонансными зонами. Соответственно  $\delta z_S$  связано с (3.18) соотношением  $\delta z_S = 2\delta z'_S \cos[(1/2)\Phi']$ .

В рассматриваемом случае можно считать, что в пределах резонансной зоны магнитное поле меняется по линейному закону

$$B(z) \approx B(z_S) \left( 1 + \frac{z - z_S}{L} \right), \quad \text{где } L = \omega_e(z_S) \left| \frac{d\omega_e}{dz} \right|_{z=z_S}^{-1}.$$

С помощью верхних формул (3.19), (3.20), а также соотношений  $q^2 - p^2 = [(\omega - \omega_{e0})/\omega_b] [q - (\omega - \omega_{e0})/4\omega_b]$ ;  $\omega - \omega_{e0} = (z_S/L_0)^2 \omega_{e0}$ ;  $v_{\parallel S}^2 = v_{\parallel 0}^2 - z_S^2 \omega_b^2$  находим, что  $\delta z'_S = (2\pi L v_{\parallel S}/\omega)^{1/2}$ , т. е. совпадает с выражением, приведенным в п. 2.1.2.

Представление  $\Delta v_{-}$  в виде (3.15) неудобно для использования, если концы интервала интегрирования совпадают с моментами прохождения через резонансные точки ( $z_S = \pm l$ ,  $l = L_0 v_{\parallel 0}/v_{\perp 0}$  — амплитуда колебаний электрона вдоль магнитного поля). В этом случае при подсчете  $\Delta v_{-}$ -приращения  $v_{-}$  за половину периода движения сместим интервал интегрирования на  $\pi/2\omega_b$ :  $(-\pi/2\omega_b, \pi/2\omega_b) \rightarrow (0, \pi/\omega_b)$ . Затем заменим переменную интегрирования:  $t' \rightarrow t - \pi/2\omega_b$ . При этом получаем выражение, отличающееся от

(3.15) фазовым множителем и другим знаком перед  $q$  в показателе экспоненты.

Условие  $z_S = l$  означает  $\omega = n\omega_{e0}(1 + v_{\parallel 0}^2/v_{\perp 0}^2)$  и может быть представлено в виде  $p^* = q$ . Напомним, что при  $z_S = 0$   $p^* = q$ . Таким образом, если не учитывать несущественный фазовый множитель, то выражения для  $\Delta v_{\perp}$  в этих двух случаях будут комплексно-сопряженными, а выражения для  $\Delta v_{\perp}$  [см. (3.17)] — одинаковыми.

Резонансное взаимодействие при  $z_S = l$  подробно рассмотрено в п. 3.3.2.

**3.1.5. Условие стохастичности в импульсном приближении.** Импульсное приближение позволяет по-иному подойти к возникновению стохастичности, а также сравнительно просто рассчитать коэффициент диффузии электронов по энергии в режиме стохастического движения. Ниже при изложении этого подхода к проблеме будем следовать работе [127].

Предположим для определенности, что резонансное условие выполняется в минимуме магнитного поля ( $\omega = \omega_{e0}$ ), и, следовательно, имеется только одна резонансная точка  $z = 0$ . Это обстоятельство делает анализ более компактным. Будем характеризовать состояние электрона скоростью поперечного движения  $v_{\perp n}$  и фазой  $\Phi_n$ , взятыми в момент времени, непосредственно следующий за  $n$ -м актом резонансного взаимодействия. Из (3.17) следует, что после прохождения резонанса в выражении  $v_{\perp}(t) = v_{\perp} \times \exp[-i\varphi(t)]$  величина  $v_{\perp}$  заменяется выражением  $v_{\perp} + \Delta v_{\perp} \times \exp[i\Phi(t_S)]$ . Отсюда следует, что резонансное взаимодействие изменяет скорость циклотронного вращения и его фазу:

$$v_{\perp n+1}^2 = v_{\perp n}^2 - 2v_{\perp n} \Delta v_{\perp} \cos \Phi_n + (\Delta v_{\perp})^2; \quad (3.21)$$

$$\Phi_{n+1} = \frac{1}{2} \Phi'_n + \arctg \left[ \frac{v_{\perp n} + \Delta v_{\perp}}{v_{\perp n} - \Delta v_{\perp}} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \Phi'_n \right) \right], \quad (3.22)$$

где с учетом (3.19)  $\Delta v_{\perp} \approx \frac{eE_{\perp}}{m_e} \frac{\Gamma(1/3)}{3^{1/6}} \left( \frac{L_0^2}{v_{\parallel 0}^2 \omega_{e0}} \right)^{1/3}$ ;  $\Phi'_n = \Phi_n + \Omega_{\perp}$ ;

$$\Omega_{\perp} = \pi n_{e0} L_0 v_{\parallel 0}^2 / 2v_{\perp n}^3;$$

набег фазы  $\Phi = \varphi(t) - \omega t$  за половину периода колебаний электрона по ловушке. Напомним, что  $\varphi(t) = \arctg(v_y(t)/v_x(t))$ .

Один из вопросов, который нас интересует, — это определение количества энергии, поглощаемой электронами. Если эту величину вычислять как работу поля колебаний  $E$  над током  $j$ , то при нахождении  $j$  можно ограничиться линейным приближением. Результат оказывается квадратичными по  $E$ . Поглощаемую энергию можно определить и по-иному, рассчитав эту величину для отдельного электрона и затем усреднив ее по ансамблю. При таком способе подсчета необходимо в выражении для приращения энергии отдельного электрона удерживать слабые, пропорциональные  $E^2$ . Это обстоятельство учтено в (3.21).

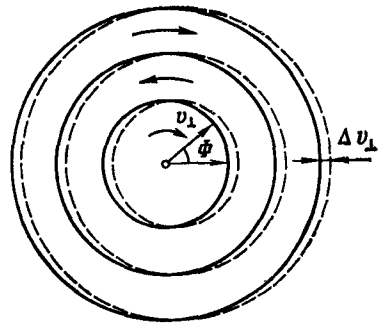


Рис. 3.4. Геометрическая интерпретация преобразований, описываемых (3.26), (3.27) на плоскости  $v_{\perp}, \Phi$

Рассмотрим движение частиц, описываемое уравнениями (3.21), (3.22), на фазовой плоскости  $v_{\perp}, \Phi$ , используя цилиндрические координаты. В импульсном приближении значения величин  $v_{\perp}, \Phi$  берутся в дискретные моменты времени, разделенные промежутками, равными  $\pi/\omega_b$ , и поэтому само оно эквивалентно введению дискретного времени. В соответствии с (3.21), (3.22) переход от  $v_{\perp n}, \Phi_n$  к  $v_{\perp n+1}, \Phi_{n+1}$  происходит в 2 этапа. На первом меняется лишь фаза:  $\Phi_n \rightarrow \Phi_n' = \Phi_n + \Omega_n$ . Это преобразование описывает движение частицы между двумя последовательными прохождениями через точку циклотронного резонанса. Ему соответствует вращение плоскости  $v_{\perp}, \Phi$  (рис. 3.4). Весьма существенно, что это вращение дифференциальное — угол поворота зависит от  $v_{\perp}$ . На втором этапе вся картина как целое сдвигается вдоль электрического поля — горизонтальной оси на  $\Delta v_{\perp}$ . (Ввиду того, что фаза циклотронного вращения  $\Phi$  отсчитывается от фазы волны, мы фактически используем вращающуюся систему координат, где электрическое поле постоянно во времени.)

Частицы, для которых выполняется условие  $\Omega = 2\pi r$ , резонансны в том же смысле, что и выше (см. анализ условия возникновения стохастичности). Действительно, величина  $\Omega$  дает набег фазы

$\theta_{\perp} - \omega t$  за половину периода колебаний. Поскольку  $\dot{\theta}_{\perp} = \omega_{e0} [1 + (1/2)(v_{\perp 0}^2/v_{\perp 0}^2)]$ ,  $\omega = \omega_{e0}$ , то условие  $\Omega = 2\pi r$  эквивалентно (3.8).

Проанализируем сначала уравнения (3.21), (3.22) при малой напряженности электрического поля, когда характерный скачок  $\Delta v_{\perp}$  мал по сравнению с расстоянием между соседними резонансами  $\sim (d\Omega/dv_{\perp})^{-1}$ . Рассмотрение особенно простое вдали от резонансов, где выполняется условие  $|v_{\perp} - V_{\perp}^{(p)}| \gg [\Delta v_{\perp} / (d\Omega/dv_{\perp})]^{1/2}$ . В этом

случае электрическое поле слабо влияет на движение частиц и его можно учесть в рамках метода последовательных приближений. В (3.21), (3.22) введем новую переменную  $\omega_n = v_{\perp n}^2$  и представим эти уравнения в виде ряда по малому отношению  $\Delta v_{\perp} / \omega_n^{1/2}$ . Уравнение (3.21) уже имеет требуемый вид, а из (3.22) получаем

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + \frac{\Delta v_{\perp}}{\omega_n^{1/2}} \sin \Phi_n + \frac{(\Delta v_{\perp})^2}{2\omega_n} \sin 2\Phi_n. \quad (3.23)$$

Из системы (3.20), (3.23) находим

$$\omega_n^{(0)} = \omega_0; \quad (3.24)$$

$$\Phi_n^{(0)} = \Phi_0 + n\Omega^{(0)}; \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \omega_n^{(1)} = & \Delta v_{\perp} \omega_0^{1/2} \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right) \times \\ & \times \left[ -\sin \left( \Phi_0 + \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right) + \sin \left( \Phi_n^{(0)} + \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(1)} = & \frac{1}{2} \Delta v_{\perp} \omega_0^{1/2} \frac{d\Omega^{(0)}}{d\omega_0} \sin^{-2} \left( \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right) \left( -\cos \Phi_0 + \cos \Phi_n^{(0)} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \Delta v_{\perp} \omega_0^{-1/2} \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right) \left[ -\cos \left( \Phi_0 + \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right) + \right. \\ & \left. + \cos \left( \Phi_n^{(0)} + \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \omega_n^{(2)} = & \frac{1}{2} (\Delta v_{\perp})^2 \sin^{-2} \left( \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right) [1 - \cos(n\Omega^{(0)})] - \\ & - \frac{1}{16} (\Delta v_{\perp})^2 \omega_0 \frac{d\Omega^{(0)}}{d\omega_0} \sin^{-3} \left( \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right) \left\{ \cos \left( \frac{3}{2} \Omega^{(0)} \right) + \right. \\ & \left. + \cos \left( 2\Phi_0 + \frac{3}{2} \Omega^{(0)} \right) - \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \Omega^{(0)} \right] - \right. \\ & \left. - \cos \left( \Phi_0 + \Phi_n^{(0)} + \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right) - \cos(2\Phi_0 + 3\Omega^{(0)}) + \cos(2\Phi_n^{(0)} + \Omega^{(0)}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Здесь  $\omega_0, \Phi_0$  — начальные значения  $\omega$  и  $\Phi$ .

Выражения (3.24) — (3.28) описывают движение электронов, находящихся „далеко от резонанса“  $|v_{\perp} - V_{\perp}^{(p)}| \gg [\Delta v_{\perp} / (d\Omega/dv_{\perp})]^{1/2}$ . Из них следует, что с точностью до значения порядка  $(\Delta v_{\perp})^2$  включительно энергия нерезонансных электронов испытывает лишь регулярные колебания около некоторого среднего значения. Если предположить, что резонансные электроны набирают энергию в электромагнитных колебаниях, то такой набор должен прекратиться, как только они покинут резонансную зону  $|v_{\perp} - V_{\perp}^{(p)}| \leq \ll [\Delta v_{\perp} / (d\Omega/dv_{\perp})]^{1/2}$ . Вывод о том, что электроны не нагреваются

в поле циклотронных колебаний, в какой-то мере является неожиданным. Действительно, в правой части (3.21) имеется постоянное слагаемое  $(\Delta v_{\perp})^2$ , которое на первый взгляд свидетельствует о непрерывном наборе энергии всеми электронами. Заметим, однако что систематический нагрев всех электронов говорил бы о несохранении (увеличении) фазовой площади на рис. 3.4 под действием преобразований (3.21), (3.22). Между тем выше было показано, что эти преобразования сохраняют фазовую площадь.

Рассмотрим теперь систему (3.21), (3.22) при выполнении обратного условия  $\Delta v_{\perp} \gg (d\Omega/dv_{\perp})^{-1}$ , считая скачки  $\Delta v_{\perp}$  достаточно малыми ( $\Delta v_{\perp} \ll v_{\perp}$ ). В этом случае система (3.21), (3.22) становится

существенно нелинейной и ее решение методом последовательных приближений (см. выше) — неприемлемым. Исследования разностных уравнений подобного типа показали, что наиболее интересные эффекты обуславливаются зависимостью фазы от другой переменной, в данном случае  $v_{\perp}$ . Эта зависимость должна учитываться в полной мере. В остальной системе (3.21), (3.22) может быть максимально упрощена. С этой целью используем разложение по малой величине  $\Delta v_{\perp}/v_{\perp} \ll 1$  и в (3.21) оставим лишь первый член разложения, а в (3.22) — нулевой:

$$v_{\perp n+1}^2 \approx v_{\perp n}^2 - 2v_{\perp} \Delta v_{\perp} \cos \Phi_n; \quad (3.29)$$

$$\Phi_{n+1} \approx \Phi_n + \Omega(v_{\perp n}). \quad (3.30)$$

Здесь амплитуда приращения  $\Delta(v_{\perp}^2)$  считается постоянной, и поэтому у величины  $2v_{\perp} \Delta v_{\perp}$  опущен индекс  $n$ .

В соответствии с [136—138] система (3.29), (3.30) — одна из простейших, моделирующих явление возникновения стохастичности. Это ее свойство можно пояснить с помощью следующих соображений. При выполнении условия  $\Delta v_{\perp} d\Omega/dv_{\perp} \gg 1$  каждый акт резонансного циклотронного взаимодействия «перебрасывает» частицу через несколько резонансов ( $\Delta v_{\perp} \gg |V_{\perp}^{(p+1)} - V_{\perp}^{(p)}|$ ). Причем, поскольку приращения  $v_{\perp}$  зависят от фазы  $\Phi$ , точки фазовой плоскости  $(\Phi, v_{\perp})$ , вначале расположенные поблизости друг от друга, уже за один шаг могут разойтись на значительное расстояние и их дальнейшие траектории будут совершенно различными. Ввиду крайне неустойчивого характера движения естественно предположить, что в реальном случае оно будет стохастичным. С помощью ЭВМ было найдено, что движение становится стохастичным при приближенном выполнении условия  $\Delta v_{\perp} d\Omega/dv_{\perp} > 1$  [139]. В то же время, если потребовать перекрытия лишь наиболее грубых резонансов первого порядка [139], условие стохастичности примет вид  $\Delta v_{\perp} d\Omega/dv_{\perp} > \pi^2/4$ . Оно, как легко убедиться, совпадает с (3.12).

При выполнении условия стохастичности отдельные приращения  $\omega = v_{\perp}^2$  нескоррелированы — фаза  $\Phi$  в (3.21) случайна. Это обстоятельство позволяет сразу написать коэффициент диффузии, который равен половине приращения дисперсии величины  $\omega$  за одно прохождение через резонансную зону:

$$D = (\Delta v_{\perp})^2 \omega. \quad (3.31)$$

Такое определение предполагает безразмерное время, измеряемое в единицах  $\pi/\omega_b$ .

Выражение (3.31) согласуется с (3.14). Действительно, в режиме стохастического движения электроны беспорядочно перескакивают между резонансами с разными номерами  $\rho$ . Если усреднить коэффициент диффузии по интервалу  $\Delta\rho$  ( $1 \ll \Delta\rho \ll \rho$ ) и перейти в (3.14) к другим переменным ( $s_{\perp} \rightarrow \omega = v_{\perp}^2$ ,  $t \rightarrow t' = \omega_b t / \pi$ ), с учетом (3.7) получим (3.31). Лишний множитель 2 в (3.14) обусловлен тем обстоятельством, что в (3.14) переменные величины предполагались комплексными  $\sim \exp(i\Phi)$ , а при выводе (3.31) — действительными  $\sim \cos \Phi$  ( $\langle |\exp(i\Phi)|^2 \rangle = 2 \langle \cos^2 \Phi \rangle$ ).

Скорость нагрева характеризуется величиной  $\langle \dot{\omega} \rangle_{\omega}$ , где  $\langle \dots \rangle_{\omega}$  означают усреднение по распределению электронов  $f(\omega)$ . Используя уравнение диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial \omega} D \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0, \quad (3.32)$$

получаем

$$\langle \dot{\omega} \rangle_{\omega} = \int d\omega \frac{dD}{d\omega} f(\omega). \quad (3.33)$$

Если  $\Delta v_{\perp}$  не зависит от  $\omega$ , то  $\langle \dot{\omega} \rangle_{\omega} = \dot{\omega} = (\Delta v_{\perp})^2$ .

Заметим, что в диффузионные уравнения типа уравнения Фоккера — Планка наряду с коэффициентом диффузии входит и коэффициент динамического трения  $A_{\text{тр}}$ . Однако, как показано в следующем подразделе, в интересующем нас случае выполняется соотношение  $A_{\text{тр}} = dD/d\omega$ , и, следовательно, уравнение Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial \omega} (A_{\text{тр}} f) - \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} (Df) = 0$$

действительно имеет вид (3.32).

Критерий стохастичности (3.12) можно также представить в виде

$$s_{\perp 0} < s_{\perp 0}^c = C (m_e L_0)^{1/4} \omega^{1/2} l (eE)^{3/4}, \quad (3.34)$$

где  $C$  — константа порядка единицы ( $C \approx 0,9$ ). Из него следует, что область диффузии частиц по энергии (нагрева) ограничена сверху критическим значением  $s_{\perp 0}^c$ . Разумеется, на самом деле область стохастического движения не имеет четкой границы. В работах [131,



132] выделялась промежуточная область фазового пространства ( $\epsilon_{\perp 0}^{(1)} < \epsilon_{\perp 0} < \epsilon_{\perp 0}^{(2)}$ ), в которой наряду со стохастическими траекториями имеются островки регулярного (упорядоченного) движения. Нижнюю границу этой области  $\epsilon_{\perp 0}^{(1)}$  определяли из условия потери устойчивости неподвижной точкой отображения типа (3.29), (3.30). При этом найдено, что  $\epsilon_{\perp 0}^{(1)} = 0,5\epsilon_{\perp 0}^{(c)}$ . Верхняя граница  $\epsilon_{\perp 0}^{(2)}$  имеет смысл

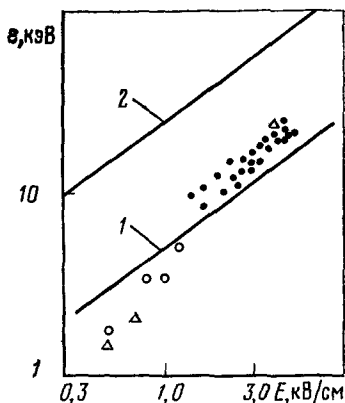


Рис. 3.5. Зависимость энергии электронов от напряжения электрического поля при циклотронном нагреве в адиабатической ловушке [134]:

○ и ● — экспериментальные результаты; △ — результат численного моделирования; 1 — граница области стохастического движения; 2 — максимальная энергия, до которой могут быть нагреты электроны; выше нее — область суперadiaбатического движения

максимальной энергии, которую могут получить заряженные частицы от циклотронных колебаний. Как численный [131], как и плазменный [134] эксперименты показали, что  $\epsilon_{\perp 0}^{(2)} \approx 5\epsilon_{\perp 0}^{(1)}$  (рис. 3.5).

## 3.2. Циклотронный нагрев при наличии случайных воздействий

### 3.2.1. Интенсивные случайные воздействия.

В реальных системах частицы подвержены случайным воздействиям — частицы сталкиваются друг с другом, сбивается фаза генератора циклотронных колебаний и т. д. Поэтому и при малой амплитуде электрического поля циклотронных колебаний, когда не выполняется условие стохастичности (см. выше), движение частиц не вполне детерминировано. Наличие циклотронных колебаний приводит к увеличению коэффициента диффузии по энергии, который может на много порядков превышать коэффициент обычной диффузии, обязанной кулоновским соударениям. Механизм аномальной диффузии родственен неоклассическому — частицы совершают значительные колебания по оси энергии, а случайные воздействия перебрасывают их с одной траектории на другую [147].

Вопрос о влиянии случайных воздействий на движение заряженных частиц в магнитных ловушках в присутствии циклотронных колебаний рассматривался в [127, 148—150]. В первой из этих работ вычисления доведены до конечного результата — получено значение коэффициента диффузии по энергии. Ниже, при анализе проблемы, будем в основном следовать этой работе. Как и в [127], используем импульсное приближение. В этом приближении случайные воздействия характеризуются величиной  $\xi_n$  — случайным

приращением фазы  $\Phi$  за время между двумя прохождениями через резонанс. Величина  $\xi_n$  должна быть добавлена в правую часть (3.22). Примем, что  $\xi_n$  распределена по нормальному закону

$$f(\xi_n) = [(2\pi)^{1/2}\sigma]^{-1} \exp(-\xi_n^2/2\sigma^2) \quad (3.35)$$

и  $\delta$  коррелирована по индексу  $n$  (дискретному времени). В [140, 141] случайные воздействия (3.35) введены в систему вида (3.29), (3.30), которая для интересующей нас задачи является упрощенной и которую в основном будем использовать в дальнейшем.

Примем сначала, что интенсивность случайных воздействий достаточно велика, так что фазовая корреляция нарушается прежде, чем волна успеет «захватить» электроны с резонансными значениями  $v_{\perp}$ . Для этого должно выполняться условие  $\sigma^2 \gg \Delta v_{\perp} \omega^{1/2} d\Omega/d\omega$ . Фактически оно означает, что за характерное время корреляции  $\Omega(\omega)$  меняется слабо. В этом случае нелинейность в резонансной области ( $\omega \approx W^{(p)}$ ) не успевает проявиться, и поэтому на всей фазовой плоскости траектории электронов можно найти методом последовательных приближений по малому параметру  $\Delta v_{\perp} \omega^{1/2}$ . Для вычисления коэффициента диффузии достаточно следующих выражений:

$$\omega_n^{(0)} = \omega_0; \quad (3.36)$$

$$\Phi_n^{(0)} = \Phi_0 + n\Omega_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k; \quad (3.37)$$

$$\omega_n^{(1)} = -2\Delta v_{\perp} \omega_0^{1/2} \sum_{k=1}^n \cos \Phi_k^{(0)}. \quad (3.38)$$

Коэффициент диффузии, как известно, определяется формулой

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} D_w(t), \quad \text{где } D_w(t) \text{ — дисперсия величины } \omega. \quad \text{Если, как и}$$

выше, за единицу времени принять время между двумя последовательными прохождениями через минимум магнитного поля, то для коэффициента диффузии получим выражение

$$D = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (\omega_{n+1} - \omega_0)^2 - (\omega_n - \omega_0)^2 \rangle, \quad (3.39)$$

где угловые скобки означают усреднение по случайной величине  $\xi_n$ . Разность  $\omega_n - \omega_0$  дается (3.38), поэтому (3.39) принимает вид

$$D = (\Delta v_{\perp})^2 \omega \left\langle \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(\Phi_{n+1}^{(0)} - \Phi_k^{(0)}) \right] \right\rangle. \quad (3.40)$$

Используя соотношения

$$\langle \cos(\Phi + \xi_n) \rangle = \cos \Phi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n f(\xi_n) \cos \xi_n = \cos \Phi \gamma,$$

где  $\gamma_\sigma = \exp(-\sigma^2/2)$ , приводим (3.40) к виду

$$D = (\Delta v_\perp)^2 \omega \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_\sigma^{k+1} \cos [(k+1) \Omega_0] \right\}. \quad (3.41)$$

Производя в (3.41) суммирование, получаем

$$D = (\Delta v_\perp)^2 \omega (1 - \gamma_\sigma^2) / \{1 - 2\gamma_\sigma \cos [\Omega_0(\omega)] + \gamma_\sigma^2\}. \quad (3.42)$$

Если  $\gamma_\sigma \ll 1$ , то отдельные приращения  $v_\perp$  нескоррелированы друг с другом и (3.42) переходит в (3.31).

Чтобы полностью определить вид диффузионного уравнения, необходимо наряду с коэффициентом диффузии определить и коэффициент динамического трения  $A_{\text{тр}} = \langle (\omega_{n+1} - \omega_n) \rangle_{n \rightarrow \infty}$ . Отличное от нуля значение  $A_{\text{тр}}$  дает  $\omega_n^{(2)}$ . Его вычисление довольно громоздко и дает  $A_{\text{тр}} = \frac{d}{d\omega} D$

[127]. Поэтому диффузионное уравнение должно иметь вид (3.32).

Выше при выводе коэффициента диффузии мы следовали [127]. В [141] тот же самый результат получен более сложным способом.

Представляет интерес еще одна процедура вывода (3.42), при которой на первый план выступают резонансы  $\Omega(v_\perp) = 2\pi n$ . Для ее демонстрации заменим упрощенную систему разностных уравнений (3.29), (3.30) эквивалентной дифференциальной, а для учета случайных воздействий введем в уравнение для фазы  $\delta$ -коррелированную во времени случайную величину  $\xi(t)$ :

$$\dot{\omega} = -2\Delta v_\perp \omega^{1/2} \cos \Phi f(t); \quad (3.43)$$

$$\dot{\Phi} = (1/T)\Omega(\omega) + \xi(t). \quad (3.44)$$

Здесь  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ ;  $T = \pi/\omega_b$ , а корреляционная функция случайной величины  $\xi(t)$  нормирована таким образом, чтобы дисперсия фазы  $\Phi$  (см. ниже) за время  $T$  возрастала на  $\sigma^2$ :

$$K_\xi(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2),$$

где  $\sigma^2 = (1/T)\sigma^2$ .

Уравнение (3.43) описывает изменение  $\omega$  под действием равноотстоящих во времени толчков. Если функцию  $f(t)$  разложить в ряд Фурье, то (3.43) приобретает вид

$$\dot{\omega} = -\frac{2}{T} \Delta v_\perp \omega^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \left( \Phi - \frac{2\pi n}{T} t \right). \quad (3.45)$$

Обратимся теперь к уравнению (3.44). Поскольку функция  $\xi(t)$   $\delta$ -коррелирована во времени, то  $\delta\Phi$ , случайную часть приращения фазы за любой конечный интервал времени, можно считать составленной из бесконечного числа независимых частей. В соответствии с центральной предельной теоремой величина

$\delta\Phi$ , должна иметь гауссово распределение. Единственный параметр, определяющий это распределение, — дисперсия — без труда находится из (3.44):

$$D_{\Phi}(t) = 2t \int_0^{\infty} K_{\xi}(\tau) d\tau = \sigma'^2 t. \quad (3.46)$$

Определив таким образом функцию распределения фазы, можно найти корреляционную функцию произвольного  $n$ -го слагаемого в правой части (3.45):

$$\begin{aligned} K_n(t_1 - t_2) &= \left\langle \cos \left( \Phi(t_1) - \frac{2\pi n}{T} t_1 \right) \cos \left( \Phi(t_2) - \frac{2\pi n}{T} t_2 \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \cos \left( (\Omega - 2\pi n) \frac{1}{T} (t_1 - t_2) \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma'^2 |t_1 - t_2| \right), \end{aligned}$$

а по ней с помощью соотношения, аналогичного (3.46), — и дисперсию величины  $w$ :

$$D_{w, n}(t) = 2t \int_0^{\infty} K_n(\tau) d\tau = \frac{2t}{T} w (\Delta v_{\perp})^2 \frac{\sigma^2}{(\sigma^2/2)^2 + (\Omega - 2\pi n)^2}.$$

Используя соотношение  $D_w(t) = 2Dt$ , находим вклад в коэффициент диффузии  $n$ -го слагаемого из правой части (3.45):

$$D_n = \frac{1}{T} w (\Delta v_{\perp})^2 \frac{\sigma^2}{(\sigma^2/2)^2 + (\Omega - 2\pi n)^2}. \quad (3.47)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что коэффициент диффузии пропорционален спектральной плотности производной  $\dot{w}$  на нулевой частоте [151]:

$$D \sim \int_0^{\infty} K(\tau) d\tau = \pi S(0).$$

Выражение (3.47) соответствует простейшему лоренцевскому закону уширения спектральной линии.

Суммирование парциальных коэффициентов диффузии производится с помощью формулы

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2\beta} \{ \text{cth} [\pi(\beta + i\alpha)] + \text{cth} [\pi(\beta - i\alpha)] \} \quad (3.48)$$

и, как нетрудно показать, приводит к (3.42).

Остановимся вкратце еще на одном методе анализа системы (3.43), (3.44). Как известно, систему стохастических дифференциальных уравнений можно заменить эквивалентным диффузионным уравнением Фоккера — Плайка. В данном случае последнее имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\Omega}{T} \frac{\partial f}{\partial \Phi} - \frac{2}{T} \Delta v_{\perp} w^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \left( \Phi - \frac{2\pi n}{T} t \right) \frac{\partial f}{\partial w} = \\ = -\frac{2}{T} (\Delta v_{\perp})^2 w \frac{df_0}{dw} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2/2}{(\sigma^2/2)^2 + (\Omega - 2\pi n)^2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Считая приращение  $\Delta v_{\perp}$  малым, будем решать (3.49) методом последовательных приближений, положив

$$f(\omega, \Phi, t) = f_0(\omega) + f_1(\omega, \Phi, t) + \dots,$$

где

$$f_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1^{(n)}; f_1^{(n)} = \Delta v_{\perp} \omega^{1/2} \frac{df_0}{d\omega} \frac{\sigma^2}{(\sigma^2/2)^2 + (\Omega - 2\pi n)^2} \times \\ \times \left[ \cos\left(\Phi - \frac{2\pi n}{T} t\right) + \frac{\Omega - 2\pi n}{\sigma^2/2} \sin\left(\Phi - \frac{2\pi n}{T} t\right) \right].$$

Диффузионный поток по оси  $\omega$ , очевидно, равен:

$$J_{\omega} = -\frac{2}{T} \Delta v_{\perp} \omega^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\Phi \cos\left(\Phi - \frac{2\pi n}{T} t\right) f_1(\omega, \Phi, t) = \\ = -\frac{2}{T} (\Delta v_{\perp})^2 \omega \frac{df_0}{d\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2/2}{(\sigma^2/2)^2 + (\Omega - 2\pi n)^2}.$$

Используя соотношение  $J_{\omega} = -Ddf_0/d\omega$  и формулу суммирования (3.48), для коэффициента диффузии получаем выражение (3.42).

В настоящем подразделе рассматривается случай  $\Omega \gg 1$  (см. также выше). Если разброс в распределении по  $\omega = v_{\perp}^2$  не слишком мал, то распределение захватывает большое число резонансов  $\Omega(\omega) = 2\pi p$ . Коэффициент диффузии колеблется при изменении  $\omega$ , принимая максимальные значения при  $\omega = W^{(p)}$ .

Разумно использовать усредненный коэффициент диффузии  $D_{av}$ . Определим его таким образом, чтобы поток частиц по оси  $\omega$ , вычисленный с помощью усредненных величин  $D_{av}$ ,  $(d/d\omega)f_{av}$ , равнялся истинному:

$$J_{\omega} = -D_{av} \frac{d}{d\omega} f_{av} = -D \frac{d}{d\omega} f. \quad (3.50)$$

Функция  $D(\omega)$  включает в себя «быструю» зависимость, входящую через  $\cos[\Omega(\omega)]$ , и «медленную» [см. (3.42)]. Наша цель состоит в устранении быстрой зависимости. Функция  $\cos[\Omega(\omega)]$  близка к периодической, и достаточно усреднить  $D(\omega)$  по одному «периоду», т. е. по интервалу  $W_{-}^{(p)} < \omega < W_{+}^{(p)}$ , где  $W_{\pm}^{(p)} = W^{(p)} \pm \pm\pi(d\Omega/d\omega)^{-1}$ . Медленная зависимость  $\omega$  будет учитываться параметрически. Поскольку на интервалах порядка  $\pi(d\Omega/d\omega)^{-1}$  усредненная функция распределения изменяется весьма мало, то производная  $(d/d\omega)f_{av}$  может быть заменена выражением

$$(W_{+}^{(p)} - W_{-}^{(p)})^{-1} [f(W_{+}^{(p)}) - f(W_{-}^{(p)})].$$

Но из (3.50) следует

$$f(W_{+}^{(p)}) - f(W_{-}^{(p)}) = -J_{\omega} \int_{W_{-}^{(p)}}^{W_{+}^{(p)}} d\omega D^{-1}(\omega).$$

Сопоставляя эти два выражения, находим, что для определения «усредненного», точнее, эффективного коэффициента диффузии, необходимо усреднить  $D_w^{-1}$ . При этом получаем

$$D_{av} = 2\pi \left( \frac{d\Omega}{d\omega} \right)^{-1} \left\{ \int_{W_{-}^{(p)}}^{W_{+}^{(p)}} d\omega' D^{-1}[\omega, \Omega(\omega')] \right\}^{-1} = (\Delta v_{\perp})^2 \omega \frac{1 - \gamma_{\sigma}^2}{1 + \gamma_{\sigma}^2}. \quad (3.51)$$

Заметим, что прямое усреднение (3.42) дало бы результат, не зависящий от  $\gamma_{\sigma}$ :  $D_{av} = (\Delta v)^2 \omega$ , что совпадает с истинным коэффициентом диффузии при  $\gamma_{\sigma} = 0$ , т. е. в приближении хаотических фаз [см. (3.31)]. Коэффициент диффузии (3.31) следует использовать в момент включения циклотронных колебаний, пока распределение по  $\omega$  еще не промодулировано волной. Однако сравнительно быстро частицы перераспределяются таким образом, что их концентрация повышается в области, где коэффициент диффузии мал, и понижается там, где он велик. Естественно, что при этом среднее значение коэффициента диффузии уменьшается [см. (3.51)].

В [141] коэффициент диффузии (3.51) был получен посредством анализа фазовой траектории частицы на достаточно больших интервалах времени. Эквивалентность обоих подходов следует из эргодической гипотезы.

Вопрос об усреднении быстроменяющегося коэффициента диффузии рассматривался также в работе [152]. Ее авторы также пришли к выводу, что усреднению подлежит не сам коэффициент диффузии, а величина, ему обратная.

С помощью (3.51) находим среднюю скорость прироста  $\omega = v_{\perp}^2$ , т. е. силу динамического трения:

$$\left( \frac{d\omega}{dt} \right)_{av} = \frac{d}{d\omega} D_{av} = (\Delta v_{\perp})^2 \frac{1 - \gamma_{\sigma}^2}{1 + \gamma_{\sigma}^2}. \quad (3.52)$$

Из этого выражения следует, что при усилении интенсивности случайных воздействий, т. е. при  $\gamma_{\sigma} \rightarrow 0$ , скорость нагрева электронов возрастает. В предельном случае  $\gamma_{\sigma} = 0$ , когда при рассмотрении можно использовать приближение хаотических фаз, (3.52) переходит в выражение, полученное в конце § 3.1.

Следует отметить, что для распределений с малым разбросом  $\delta\omega \ll \pi (d\Omega/d\omega)^{-1}$  нельзя использовать усредненные величины. В этом случае скорость нагрева может существенно отличаться от (3.52). Более того, если частицы сконцентрированы в области, где  $dD/d\omega < 0$ , то они отдают энергию колебаниям, т. е. плазма неустойчива.

**3.2.2. Слабые случайные воздействия.** Если фазовая корреляция сохраняется в течение длительного времени  $\sigma \ll \Delta v_{\perp} \omega^{1/2} d\Omega/d\omega$ , то случайные воздействия слабо влияют на движение частиц по фазовой плоскости, и это влияние может быть учтено в рамках метода последовательных приближений. Вдали от резонансной зоны [ $|\omega - W^{(p)}| \gg (\Delta v_{\perp})^{1/2} \omega^{1/2} (d\Omega/d\omega)^{-1/2}$ ], т. е. в области, где траек-

тории близки к прямым линиям, можно использовать результаты предыдущего подраздела. Однако окрестности резонансных прямых  $\omega = W^{(p)}$  требуют специального анализа.

Считая, что все величины за одно прохождение через резонанс меняются мало, перейдем от разностных уравнений (3.21), (3.22) к дифференциальным. (Приращение  $\omega$  мало, поскольку считается малым электрическое поле, а приращение  $\Phi$  мало вследствие близости к резонансу.) Введем непрерывное безразмерное время  $\tau = \pi \delta$ , где  $\delta = \Delta v_{\perp} / V_{\perp}^{(p)} \ll 1$ . Приращения  $\omega_{n+1} - \omega_n$ ,  $\Phi_{n+1} - \Phi_n$  представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_{n+1} - \omega_n &= \dot{\omega} \delta + (1/2) \ddot{\omega} \delta^2 + \dots; \\ \Phi_{n+1} - \Phi_n &= \dot{\Phi} \delta + (1/2) \ddot{\Phi} \delta^2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

где  $\dot{\omega}$ ,  $\ddot{\omega}$ ,  $\dot{\Phi}$ ,  $\ddot{\Phi}$  — функции  $\omega$ ,  $\Phi$ , причем очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\omega} &= \dot{\omega} \partial \dot{\omega} / \partial \omega + \dot{\Phi} \partial \dot{\omega} / \partial \Phi; \\ \ddot{\Phi} &= \dot{\omega} \partial \dot{\Phi} / \partial \omega + \dot{\Phi} \partial \dot{\Phi} / \partial \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Используя (3.21), (3.23), (3.19), (3.20), получаем

$$\dot{\omega} = 2 (\omega W^{(p)})^{1/2} \cos \Phi - \delta \omega^{(p)}(\omega) (\omega W^{(p)})^{1/2} \sin \Phi; \quad (3.55)$$

$$\dot{\Phi} = \omega^{(p)}(\omega) - (W^{(p)}/\omega)^{1/2} \sin \Phi - \delta \frac{d}{d\omega} [(\omega W^{(p)})^{1/2} \omega^{(p)}(\omega)] \cos \Phi, \quad (3.56)$$

где  $\omega^{(p)}(\omega) = (\Omega(\omega) - 2\pi r) / \delta$ . Здесь разность  $\Omega(\omega) - 2\pi r$  считается малой (порядка  $\delta$ ). Уравнения (3.55), (3.56) можно получить из гамильтониана

$$H = \int d\omega' \omega^{(p)}(\omega') - 2 (\omega W^{(p)})^{1/2} \sin \Phi - \delta (\omega W^{(p)})^{1/2} \omega^{(p)}(\omega) \cos \Phi. \quad (3.57)$$

Последнее слагаемое в (3.57) мало, и им, вообще говоря, можно пренебречь. Оно обязано членам, квадратичным по  $\Delta v_{\perp}$  в (3.21), (3.23), и учтено, чтобы показать, что соответствующие слагаемые также могут быть включены в гамильтонову схему. При  $\omega = W^{(p)}$  частоту  $\omega^{(p)}(\omega)$  можно разложить в ряд по малой разности  $\omega - W^{(p)}$ . Опуская в (3.57) последнее слагаемое, приводим гамильтониан к стандартному виду:

$$H = \frac{1}{2} \left. \frac{d\omega^{(p)}}{d\omega} \right|_{\omega=W^{(p)}} (\omega - W^{(p)})^2 - 2W^{(p)} \sin \Phi. \quad (3.58)$$

Соответствующие фазовые траектории изображены на рис. 3.2. Заметим, что траектории, описываемые выражениями (3.24) — (3.28), которые могут быть получены из разностных уравнений (3.21), (3.23), следует отнести к пролетным.

Для учета случайных воздействий введем в (3.58) слагаемое  $\omega \xi(\tau)$ . Переходя к новым переменным  $u = (\omega - W^{(p)}) (2^{-1} (W^{(p)})^{-1/2} d\omega^{(p)}/d\omega)^{1/2}$ ,  $\tau' = \tau (2W^{(p)} d\omega^{(p)}/d\omega)^{1/2}$  и смещая угол  $\Phi$  на  $\pi/2$ , получаем

$$H = (1/2) u^2 - \cos \Phi + u \xi_s(\tau'). \quad (3.59)$$

Здесь случайная величина  $\xi_s(\tau')$  связана с величиной  $\xi(\tau)$ , введенной в предыдущем подразделе, соотношением

$$\xi_s(\tau') = \xi(\tau) (2W^{(p)} d\omega^{(p)}/d\omega)^{-1/2}.$$

Траектории, описываемые гамильтонианом (3.59) без последнего члена, как известно, выражаются через эллиптические функции. В области «пролетного» движения имеем

$$\Phi = 2am[(\alpha_s/\pi)K(1/k)]; \quad (3.60)$$

$$u = \partial\Phi/\partial\tau' = 2k \operatorname{dn}[(\alpha_s/\pi)K(1/k)]; \quad (3.61)$$

$$\alpha_s = \alpha_{s0} + \omega(I_s)\tau',$$

где  $I_s = (4k/\pi)E(1/k)$ ;  $\omega(I_s) = k\pi K^{-1}(1/k)$ ;  $E$  и  $K$  — полные эллиптические интегралы;  $k = [(1/2)(1+H)]^{1/2}$  [137, 147].

Уравнения для поправок к действию и фазе  $I_s^{(1)}$ ,  $\alpha_s^{(1)}$ , вызванных случайными воздействиями, имеют вид

$$I_s^{(1)\dot{}} = -\xi_s(\tau') \partial u / \partial \alpha_s; \quad (3.62)$$

$$\dot{\alpha}_s^{(1)} = \omega'(I_s) I_s^{(1)} + \xi_s(\tau') \partial u / \partial I_s. \quad (3.63)$$

Из этих выражений получаем

$$I_s^{(1)} = - \int^{\tau'} d\tau \xi_s(\tau) \frac{\partial u}{\partial \alpha_s}(I_s, \alpha_s(\tau)); \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(1)} = & \int^{\tau'} d\tau \xi_s(\tau) \frac{\partial u}{\partial I_s}(I_s, \alpha_s(\tau)) - \omega'(I_s) \int^{\tau'} d\tau \int^{\tau} d\tau_1 \xi_s(\tau_1) \times \\ & \times \frac{\partial u}{\partial \alpha_s}(I_s, \alpha_s(\tau_1)). \end{aligned} \quad (3.65)$$

С помощью (3.64) находим выражение для коэффициента диффузии:

$$D(I_s) = \langle I_s^{(1)} \dot{I}_s^{(1)} \rangle_{\alpha_s} = (\sigma_s^2/2) \langle (\partial u / \partial \alpha_s)^2 \rangle_{\alpha_s}. \quad (3.66)$$

Здесь  $\sigma_s^2 = (\sigma^2/\delta) (2W^{(p)} d\omega^{(p)}/d\omega)^{-1/2} \ll 1$ ; скобки с индексом  $\alpha_s$  означают усреднение по начальной фазе.

Найдем теперь коэффициент динамического трения. Для этого представим гамильтониан (3.59) в виде  $H = H_0 + u\xi_s(\tau')$ , где  $H_0$  — невозмущенный гамильтониан (3.58). Поскольку  $dH/d\tau' = u d\xi_s/d\tau'$ , то для  $dH_0/d\tau'$  получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dH_0}{d\tau'} \right\rangle &= \omega(I_s) \left\langle \frac{dI_s^{(2)}}{d\tau'} \right\rangle + \omega'(I_s) \left\langle I_s^{(1)} \frac{dI_s^{(1)}}{d\tau'} \right\rangle = \\ &= - \left\langle \xi_s(\tau') \frac{\partial u}{\partial \tau'} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Подставляя в (3.67) выражение для  $dI_s^{(1)}/d\tau'$  (3.62) и используя при вычислении  $\langle \xi_s(\tau') \partial u / \partial \tau' \rangle$  выражения (3.64), (3.66), получаем

$$\left\langle \frac{dI_s^{(2)}}{d\tau'} \right\rangle = \frac{\sigma_s^2}{2} \left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha_s} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_s \partial I_s} - \frac{\partial u}{\partial I_s} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_s^2} \right) \right\rangle.$$

Если полученное выражение проинтегрировать по частям, то нетрудно найти, что  $\langle dI_s/d\tau' \rangle = D'(I_s)$ . Этот же результат получен в [153] иным способом.



В силу того что коэффициент динамического трения и коэффициент диффузии удовлетворяют соотношению  $A_{\tau p} = D'(I_s)$ , уравнение Фоккера — Планка имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau'} - \frac{\partial}{\partial I_s} D(I_s) \frac{\partial f}{\partial I_s} = 0. \quad (3.68)$$

В дальнейшем нас будут интересовать лишь пролетные частицы. Используя (3.66), для  $D(I_s)$  можно получить простые выражения в двух предельных случаях:  $k \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow 1$ , т. е. в области почти прямолинейных траекторий и поблизости от сепаратрисы, разделяющей пролетные и захваченные траектории.

В первой из этих областей ( $k \rightarrow \infty$ )

$$D(I_s) \approx \sigma_s^2 / 4I_s^2. \quad (3.69)$$

Если выполняется условие  $d\Omega/dw \gg |w - W^{(p)}| \gg (\Delta v_{\perp})^{1/2} w (d\Omega/dw)^{-1/2}$ , то (3.69) совпадает с (3.42). Чтобы убедиться в этом, необходимо в (3.42) разложить  $\cos(\Omega(w))$  по малой разности  $w - W^{(p)}$ , учесть, что в этой области  $I_s \approx u$ , а также вспомнить определения  $u$ ,  $\tau'$ ,  $\delta$ .

При  $k \rightarrow 1$  ( $I_s \rightarrow 4/\pi$ ) коэффициент диффузии расходится по логарифмическому закону:

$$D(I_s) \approx 2\pi^{-4} A \sigma_s^2 |\ln(I_s - 4/\pi)|,$$

где  $A = \int_0^{\infty} dx x^2 \exp(-x) [1 + \exp(-x)]^2$ .

Как и в предыдущем подразделе, рассмотрим размытые распределения, эволюция которых определяется средним значением коэффициента диффузии  $D_{av}(w)$ . Для таких распределений поток  $J_w$  в пределах одной ячейки  $W_{-}^{(p)} < w < W_{+}^{(p)}$  изменяется на весьма малую величину  $\delta J_w / J_w \sim (W_{+}^{(p)} - W_{-}^{(p)}) / W^{(p)} \ll 1$  и при приближенном описании диффузия может считаться стационарной. Проанализируем процесс диффузии в области захваченных траекторий  $w \approx W^{(p)}$ . Предположим, что у какой-то частицы действие  $I_s$  уменьшилось до значения  $< 4/\pi$ , т. е. она захватилась волной. Тогда в стационарном случае одновременно другая частица должна из захваченных перейти в пролетные — ее действие должно возрасти. Таким образом, в области захваченных траекторий результирующий поток равен нулю, и эту область можно вообще не рассматривать.

В области пролетных траекторий переменную  $w$  удобно заменить  $I_s$ , поскольку при этом уравнение диффузии принимает вид (3.68). Эта переменная при  $I_s \gg 1$  переходит в переменную  $f(I_s)$ , которая, в свою очередь, линейно связана с  $w$  (см. выше). Поэтому при  $I_s \gg 1$  функция  $f(I_s)$  лишь нормировочным множителем отличается от  $f(w)$ . Для определения  $D_{av}(w)$  достаточно знать разность  $f(W_{+}^{(p)}) - f(W_{-}^{(p)})$  (см. предыдущий подраздел). Поскольку  $I_s \gg 1$ , то для  $D_{av}(w)$  получаем выражение

$$D_{av}(w) = (W_{+}^{(p)} - W_{-}^{(p)}) 2\delta \left( \int_{I_s(W_{-}^{(p)})}^{I_s(W_{+}^{(p)})} dI_s D^{-1}(I_s) \right)^{-1}. \quad (3.70)$$

Здесь интегрирование идет только по пролетным траекториям.

Частица быстро проходит через области, где коэффициент диффузии велик, и надолго задерживается там, где он мал. Поэтому значение  $D_{av}(w)$  определяется областями замедленной диффузии. Величина  $D(I_s)$  уменьшается с ростом  $I_s$ , т. е. с удалением от сепаратрисы, разделяющей области пролетных и захва-

ченных траекторий. Разделим область интегрирования в (3.70) на три части и оценим вклад каждой из них. К первой отнесем область значений  $I_s \gg 1$ , именно она и определяет значение интеграла. Вклад второй, если  $I_s \approx 1$ , в  $(\Delta v_{\perp} \omega^{1/2} \times \times d\Omega/d\omega)^{3/2} \gg 1$  раз меньше. Наконец, в третьей области ( $I_s \rightarrow 4/\pi$ ) коэффициент диффузии логарифмически расходится. Расходимость вызвана неприменимостью метода последовательных приближений в окрестности сепаратрисы. Она устраняется при переходе к точной теории. Однако поскольку коэффициент диффузии стоит в знаменателе подынтегрального выражения, то в любом варианте теории вклад этой области конечен и составляет малую долю  $\ll \sigma_s^2$  от вклада второй области. Таким образом, приходим к заключению, что  $D_{av}(\omega)$  определяется вкладом первой области ( $I_s \gg 1$ ). В ней траектории близки к прямым линиям, и поэтому могут быть использованы все результаты, полученные в предыдущем подразделе. В частности, коэффициент диффузии  $D_{av}(\omega)$  с погрешностью не хуже  $(\Delta v_{\perp} \omega^{1/2} d\Omega/d\omega)^{-3/2} \ll 1$  должен совпадать с (3.51).

В настоящем подразделе изучалось влияние случайных воздействий на резонансное циклотронное взаимодействие в режиме сильно разделенных резонансов, когда критерий стохастически не выполняется и случайный элемент привносится извне. В [140, 141] случайные воздействия вводились в систему, аналогичную (3.29), (3.30), без какого-либо предположения о степени перекрытия резонансов. Конечные выражения для коэффициента диффузии были получены в двух предельных случаях. В глубине области стохастичности, где критерий перекрытия резонансов выполняется с большим запасом, коэффициент диффузии лишь малыми поправками отличается от вычисленного в приближении хаотических фаз (3.31). В обратном предельном случае сильно разделенных резонансов выражения для коэффициента диффузии совпадают с (3.42), (3.51).

### 3.3. Эффекты, обусловленные резонансным циклотронным взаимодействием в ограниченных системах

3.3.1. «Просвист» в циклотронных колебаниях. В предыдущих параграфах предполагалось, что размер резонансной зоны  $\delta z_S$  мал по сравнению с амплитудой колебаний частицы вдоль магнитного поля  $l = L_0 v_{\parallel 0} / v_{\perp 0}$ . Это условие можно записать в различных эквивалентных представлениях:  $\Omega = (\pi/2) (\omega_{e0} L_0 v_{\parallel 0}^2 / v_{\perp 0}^3) \gg 1$ ;  $|\Omega_{\perp} - \omega| \gg \omega_b$ ;  $q \gg (1/4) (J_{\parallel} / J_{\perp})$ ;  $l \gg (L_0 \rho_e)^{1/2}$ . Если  $q \gg 1$ , то в гамильтониане (3.7) значительное число гармоник фазы продольного движения  $\propto \cos(\theta_{\perp} - \omega t - 2p\theta_{\parallel})$  входит примерно с одинаковым весом  $\sim J_p(q)$ . При достаточно большой амплитуде электрического поля соответствующие резонансы (3.8) перекрываются, что ведет к стохастизации движения электронов.

Обратное условие  $\Omega \ll 1$  [ $l \ll (L_0 \rho_e)^{1/2}$ ] означает, что размах колебаний электрона вдоль магнитного поля невелик и электроны при своем движении не выходят за пределы резонансной зоны. В этом случае, как показано ниже, колебания с  $\omega = \omega_{e0}$  при достаточно большой амплитуде электрического поля «захватывают» электроны. В режиме захвата электрон вращается по ларморовской окружности не с локальной циклотронной частотой, меняющейся в ловушке от точки к точке, а с фиксированной частотой электро-

магнитных колебаний. Захваченные электроны непрерывно ускоряются электрическим полем колебаний, несмотря на неоднородность магнитного поля ловушки [142]. Непрерывное возрастание поперечной энергии вызывает стягивание электронов к центру ловушки ( $l = L_0 v_{\parallel 0} / v_{\perp 0}$  уменьшается). Стягивание облегчает дальнейшее ускорение электронов колебаниями с  $\omega = \omega_{e0}$ . В результате в центре ловушки образуется слой электронов с  $v_{\perp 0} \gg v_{\parallel 0}$ . Кулоновские соударения, сбивающие фазу ларморовского вращения, могут помешать образованию слоя электронов с  $v_{\perp 0} \gg v_{\parallel 0}$ . Однако уже при сравнительно небольших электрических полях, легко достигаемых в современном эксперименте, влияние кулоновских соударений оказывается несущественным [154]. Это обстоятельство сближает описываемый режим нагрева электронов с известным явлением просвиста.

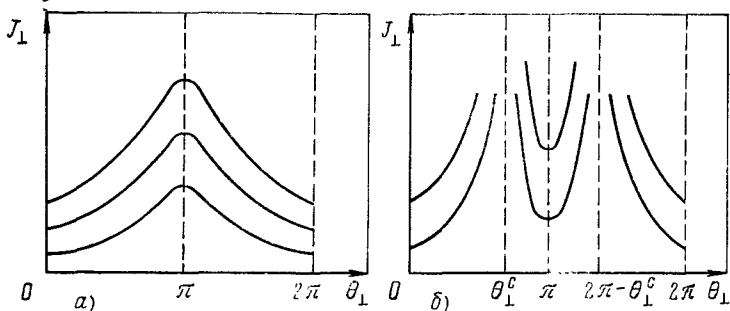


Рис. 3.6. Фазовые траектории описываемые гамильтонианом (3.71), при  $E_- < E_-^c$  (а) и  $E_- > E_-^c$  (б)

Проанализируем процессы, ведущие к образованию слоя электронов с  $v_{\perp 0} \gg v_{\parallel 0}$ , следуя [154]. Если выполняется условие  $q \ll 1$  (см. выше), то в разложении гамильтониана (3.7) по гармоникам фазы продольного движения  $\theta_{\parallel}$  можно оставить лишь нулевой член [ср. с (3.9)]:

$$H = \omega_b(J_{\perp}) \left( J_{\parallel} + \frac{eE_- L_0}{\omega} \cos \theta_{\perp} \right). \quad (3.71)$$

Здесь считается, что  $\omega = \omega_{e0}$ , а также в силу условия  $q \ll 1$  функция Бесселя  $J_0(q)$  заменена единицей.

Фазовые траектории, описываемые гамильтонианом (3.71), изображены на рис. 3.6. При  $E_- < E_-^c = J_{\parallel} \omega / eL_0$  фаза на траекториях изменяется монотонно, а  $J_{\perp}$  колеблется периодически. Если электрическое поле превышает критическое значение  $E_-^c$ , то фазовые траектории уходят на бесконечность при фиксированном значении фазы  $\theta_{\perp}^c$ , определяемом условием  $\cos \theta_{\perp}^c = E_-^c / E_-$ . Такой характер траекторий свидетельствует о захвате электронов волной (фаза  $\theta_{\perp}$  стремится к постоянному значению) и их неограниченном ускорении. Отметим, что условию  $E_- > E_-^c$  можно дать простую интерпретацию, а именно, это условие означает, что фаза  $\theta_{\perp}$  изменяется медленнее,

чем сама частота ( $\dot{\theta}_\perp = \Omega_\perp - \omega$ ). Действительно, у электронов, вошедших в режим непрерывного ускорения, поперечная скорость  $v_{\perp 0}$  возрастает по закону  $v_{\perp 0} \approx (eE_-/m_e) \sin \theta_\perp^c$ . В результате при  $E_- > E_-^c$  имеем  $|\dot{\Omega}_\perp/(\Omega_\perp - \omega)| = 2v_{\perp 0}^c/v_{\perp 0} \gg \Omega_\perp - \omega$ . При выполнении последнего условия электрон в силу увеличения  $v_{\perp 0}$  „затягивается“

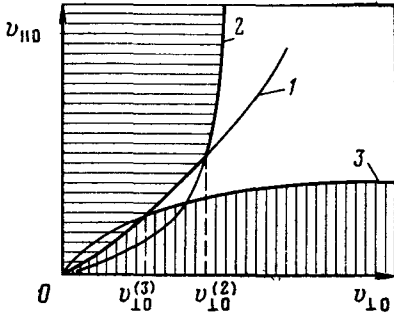


Рис. 3.7. Область стохастического нагрева (заштрихована горизонтально) и нагрева в режиме просвиста (заштрихована вертикально)

в минимум магнитного поля, т. е. к резонансной точке, быстрее, чем успевает накопиться фазовое несогласование, достаточное для выхода из резонанса.

В режиме захвата волной электроны непрерывно и систематически увеличивают свою энергию. В противоположность стохастическому режиму нагрева такой нагрев может быть назван детерминированным или нагревом в режиме просвиста (см. ниже). Сопоставим условия, требуемые для стохастического и детерминированного нагрева. Необходимое условие стохастичности имеет вид  $q \gg 1$ , в то время как для осуществления детерминированного нагрева требуется выполнение обратного условия ( $q \ll 1$ ).

На плоскости  $(v_{\perp 0}, v_{\parallel 0})$  (рис. 3.7) граничная кривая  $q = 1$  ( $v_{\parallel 0} = 2v_{\perp 0}^{3/2}(L_0\omega_{e0})^{-1/2}$ ) отмечена цифрой 1. Для возникновения стохастичности требуется также, чтобы амплитуда электрического поля удовлетворяла условию (3.12). Его можно представить в виде  $v_{\parallel 0} \gg v_{\perp 0}^3 c^{-3/4} (\omega_{e0} L_0)^{-5/4} (B_0/E_-)^{3/4}$ . Аналогичным образом условие  $E_- > E_-^c$ , полученное в настоящем параграфе, запишем как  $v_{\parallel 0} \leq (v_{\perp 0} c)^{1/2} (E_-/B_0)^{1/2}$ . На рис. 3.7 соответствующие граничные кривые отмечены цифрами 2 ( $v_{\parallel 0} = v_{\perp 0}^3 c^{-3/4} (\omega_{e0} L_0)^{-5/4} (B_0/2E_-)^{3/4}$ ) и 3 ( $v_{\parallel 0} = (2v_{\perp 0} c)^{1/2} (E_-/B_0)^{1/2}$ ). При  $q = 1$  оба условия на напряженность электрического поля совпадают по порядку, поэтому и точки пересечения кривых 2 ( $v_{\perp 0}^{(2)} = 2^{7/6} (c\omega L_0)^{1/2} (E_-/B_0)^{1/2}$ ) и 3 ( $v_{\perp 0}^{(3)} = 2^{-1/2} \times (c\omega L_0)^{1/2} (E_-/B_0)^{1/2}$ ) с кривой 1 близки друг к другу.

Рассмотрим теперь влияние ряда факторов, которые могут мешать ускорению электронов или ограничить набор энергии в циклотронных колебаниях.

Кулоновские соударения. В режиме захвата электронов волной их поперечная скорость изменяется так же, как при ускорении постоянным электрическим полем в отсутствие магнитного:  $v_{\perp 0} = -(eE_-/m_e) \sin \theta_\perp^c$ . В случае немагнитной плазмы ку-

лоновские соударения не препятствуют ускорению электронов, если постоянное электрическое поле превышает некоторое критическое — драйсеровское значение [155]. Выход в режим просвиста при ускорении циклотронными колебаниями облегчается тем, что напряженность их электрического поля может достигать сравнительно больших значений, на несколько порядков превышающих напряженность постоянного электрического поля, которое можно поддерживать в незамагниченной плазме. Однако непрерывно ускоряются лишь электроны, вектор скорости которых почти перпендикулярен магнитному полю. Поэтому даже слабые возмущения, вообще говоря, могут прервать процесс ускорения.

Под действием соударений дисперсия продольной скорости  $\mathcal{D}v_{\parallel 0}$  возрастает со временем по закону [155]

$$(d/dt) \mathcal{D}v_{\parallel 0} = 2\nu_e v_{Te}^3 / v_{\perp 0}, \quad (3.72)$$

где  $\nu_e$  — частота кулоновских соударений электронов, движущихся с тепловой скоростью  $v_{Te}$ . В режиме резонансного ускорения  $dv_{\perp 0}/dt = eE_{\perp}/m_e$ . Учитывая это соотношение, заменим  $d/dt$  в (3.72) выражением  $(eE_{\perp}/m_e) \sin \theta_{\perp}^c d/dv_{\perp 0}$ .

Интегрируя в (3.72) по времени, получаем приращение дисперсии  $\mathcal{D}v_{\parallel 0}$  при увеличении поперечной скорости от  $v_{Te}$  до  $v_{\perp 0}$ :

$$\mathcal{D}v_{\parallel 0} = (2\nu_e m_e / eE_{\perp} \sin \theta_{\perp}^c) \ln(v_{\perp 0} / v_{Te}).$$

Поскольку дисперсия продольной скорости в функции от  $v_{\perp 0}$  возрастает по логарифмическому закону, а предельное допустимое значение  $v_{\perp 0}$  — по степенному (см. рис. 3.7), то явление просвиста должно иметь место. Последовательность явлений, приводящих к просвисту, такова: посредством диффузии в стохастическом режиме электроны подаются на границу области непрерывного ускорения, после чего электрическое поле уводит их в просвист. При этом режим просвиста начинается с

$$v_{\perp 0} \approx \left( \frac{B_0 I_0 \nu_e}{E_{\perp} c} \right)^{1/3} v_{Te} \quad \text{при} \quad v'_{\perp 0} \approx \frac{v_{Te}^3}{c^2} \frac{\nu_e}{\omega} \left( \frac{B_0}{E_{\perp}} \right)^2 < v_{\perp 0}^{(3)} \quad \text{и} \quad v_{\perp 0} \approx v'_{\perp 0} \quad \text{при} \quad v'_{\perp 0} > v_{\perp 0}^{(3)}.$$

Релятивизм. В релятивистском случае гамильтониан  $H$  и адиабатический интеграл  $J_{\perp}$  даются выражениями

$$\left. \begin{aligned} H &= [m_e^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P}_{\perp} - \mathbf{A}e/c)^2 + c^2 p_{\parallel}^2]^{1/2}; \\ J_{\perp} &= c p_{\perp}^2 / 2eB. \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

(Как и выше, рассматриваем колебания с  $E_{\parallel} = 0$ .)

Будем считать, что движение вдоль магнитного поля происходит с нерелятивистскими скоростями и поэтому описывается уравнениями

$$\dot{p}_{\parallel} = -2\mu B_0 z / L_0^2; \quad (3.74)$$

$$\dot{z} = p_{\parallel} c^2 / \varepsilon_0, \quad (3.75)$$

где  $\mu = ecJ_{\perp} / B_0$ ;  $\varepsilon_0 = (m_e^2 c^4 + 2eB_0 cJ_{\perp})^{1/2}$ .

Выражая в (3.73)  $p_{\perp}^2$  через  $J_{\perp}$ , разлагая результат по малым значениям  $(z/L_0)^2$ ,  $(p_{\parallel}/p_{\perp})^2$  и учитывая траекторию продольного движения, определяемую уравнениями (3.74), (3.75), приходим к выражению (3.7), в котором первое слагаемое заменено  $\varepsilon_0(J_{\perp})$ . Вводя затем фазу  $\Phi = \theta_{\perp} - \omega t$  и усредняя по быстрым осцилляциям вдоль магнитного поля, получаем следующее выражение для гамильтониана [ср. с (3.71)]:

$$H = \varepsilon_0(J_{\perp}) - \omega J_{\perp} + \omega_b(J_{\perp}) \left( J_{\parallel} + \frac{eE_{\perp} L_0}{\omega} \cos \theta_{\perp} \right). \quad (3.76)$$

Здесь, как и в (3.71), считается  $J_{\parallel} \gg J_{\perp}$ . Частота продольных колебаний в релятивистском случае  $\omega_b(J_{\perp}) = (c/L_0)(2eB_0 cJ_{\perp})^{1/2} \varepsilon_0^{-1}(J_{\perp})$ .

Рассмотрим движение электронов, описываемое гамильтонианом (3.76), при  $\omega = \omega_{e0}$  в слаборелятивистском случае. Используя разложение

$$\varepsilon_0(J_{\perp}) = m_e c^2 + \omega_{e0} J_{\perp} - (1/2)(\omega_{e0} J_{\perp})^2 / m_e c^2 + \dots,$$

нетрудно показать, что в электрическом поле, превышающем критическое ( $E_{\perp} > E_c$ ), фазовые траектории имеют вид, изображенный на рис. 3.8. Из него следует, что релятивизм ограничивает ускорение электронов. В результате их энергия меняется со временем периодически [156]. Если в начальный момент скорость  $v_{\perp 0}$  была пренебрежимо малой, то среднее по периоду значение  $v_{\perp 0}$

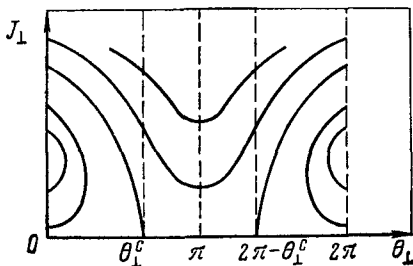


Рис. 3.8. Фазовые траектории, описываемые гамильтонианом (3.76) при  $\omega = \omega_{e0}$ ,  $E_{\perp} > E_c$ .

будет порядка  $c(E_{\perp}/B_0)^{1/3}$ . Такой же характер имеет движение электронов при циклотронном резонансе в однородном магнитном поле, если  $k=0$  [157—159]. Если же  $k \neq 0$ , то в случае однородного магнитного поля возможно непрерывное ускорение заряженных частиц, несмотря на релятивистское изменение массы [157, 159—161].

Поперечная неоднородность магнитного по-

ля. В адиабатических ловушках магнитное поле неоднородно как в продольном, так и в поперечном направлениях. Поэтому условие  $\omega = \omega_{e0}$  не может быть выполнено на всех силовых линиях магнитного поля. Нетрудно показать, что максимальная скорость, которой могут достичь электроны при  $\omega \neq \omega_{e0}$ , равна  $\sim eE_- / m_e |\Delta\omega|$ , где  $\Delta\omega = \omega - \omega_{e0}$ .

Немонохроматичность циклотронных колебаний. Выше электромагнитные колебания предполагались моноэнергетическими. Однако в действительности спектральная функция любых колебаний имеет конечную ширину  $\sim \Delta\omega$ , и поэтому приближение моноэнергетических колебаний пригодно лишь на интервалах времени порядка  $(\Delta\omega)^{-1}$ . За это время  $v_{\perp 0}$  изменяется на  $\sim eE_- / m_e \Delta\omega$ . На больших интервалах времени изменения  $v_{\perp 0}$  имеют диффузионный характер с шагом  $\sim eE_- / m_e \Delta\omega$ .

Когерентное излучение. До тех пор, пока не начнет сказываться влияние релятивизма, электроны стремятся сконцентрироваться при одном и том же значении фазы  $\theta_{\perp}$  (см. рис. 3.6). В результате в области  $\omega_e(\mathbf{r}) \approx \omega$  образуется слой сфазированных электронов. Его продольный размер (толщина) довольно мал  $\delta z \ll \ll (L_{0pe})^{1/2}$ , а поперечный определяется поперечной неоднородностью магнитного поля (см. выше). Излучение электронов в этом слое когерентное. Возможно такое стационарное состояние, когда вся энергия, приобретаемая электронами от циклотронных колебаний, затрачивается на излучение. При этом необходимо различать две возможности: в зависимости от соотношения между длиной волны излучаемых колебаний  $\lambda \approx \omega_e / c$  и поперечным размером слоя  $l_{\perp}$ . При  $l_{\perp} \ll \lambda$  электроны излучают когерентно по всем направлениям. Приравнивая энергию, получаемую от внешнего поля  $NeE_- v_{\perp 0}$ , излучаемой энергии  $-(N\epsilon\omega v_{\perp 0})^2 c^{-3}$  [62], находим  $v_{\perp 0} \approx \approx (cE_- / B_0) m_e c^3 / e^2 \omega N$ , где  $N$  — полное число электронов в слое. При выполнении обратного условия  $l_{\perp} \gg \lambda$  фаза излучаемых колебаний будет постоянна в пределах слоя, лишь если их волновой вектор наклонен к магнитному полю под достаточно малым углом  $\delta\theta \ll \lambda / l_{\perp}$ . В этом случае имеем  $v_{\perp 0} \approx c(E_- / B_0) m_e c^3 / e^2 \omega N (\delta\theta)^3$ .

Неустойчивости. В слое распределение электронов по энергиям анизотропно — поперечная энергия значительно превышает продольную. Это обстоятельство может иметь следствием развитие неустойчивости [9, 17]. При этом энергия из поперечной степени свободы будет переходить в продольную, что может привести к разрушению слоя.

**3.3.2. Возникновение группы «плещущихся» электронов.** Если магнитное поле изменяется вдоль силовых линий немонотонно (имеет минимум), то при взаимодействии с циклотронными колебаниями электроны «затягиваются» в область минимума магнитного поля как при  $\omega = \omega_{e0}$ , так и при  $\omega > \omega_{e0}$ , хотя в последнем случае механизм затягивания, естественно, отличается от рассмотренного в предыдущем подразделе. При  $\omega > \omega_{e0}$  имеются две точки цикло-

тронного резонанса, расположенные по разные стороны от минимума магнитного поля. В резонансном циклотронном взаимодействии участвуют электроны, которые при движении вдоль магнитного поля заходят за резонансные точки. Резонансное циклотронное взаимодействие приводит к диффузии по  $\varepsilon_{\perp}$  (см. § 3.1, 3.2), при этом диффузионный поток направлен в сторону больших значений  $\varepsilon_{\perp}$ , что и означает нагрев электронов. Из-за увеличения  $\varepsilon_{\perp}$ , а следовательно, и магнитного момента  $\mu = \varepsilon_{\perp}/B$  точка отражения электронов от области большего магнитного поля приближается к резонансной. (В токамаках, где наряду с частицами, запертыми на внешнем обводе тора, имеются пролетные, последние под действием циклотронных колебаний сначала переходят в запертые, а затем начинается процесс затягивания.) Критическим является поведение электронов, у которых точка отражения попадает в резонансную зону. Продолжение процесса затягивания к минимуму поля привело бы к прекращению резонансного взаимодействия. Однако было показано [162], что затягивание прекращается, когда точка отражения подходит к точке циклотронного резонанса.

Проанализируем подробно, как влияют циклотронные колебания на движение частиц, останавливающихся вблизи резонансной точки. Используя (1.9), представим уравнение продольного движения, усредненное по ларморовскому вращению, в виде

$$\ddot{z} = -\frac{e}{m_e} \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} E_{-, n-1} \sin(\Psi_{-, n-1}(t)) - \frac{v_{\perp}}{2B_0} \frac{\partial B_0}{\partial z}, \quad (3.77)$$

где из-за неоднородности магнитного поля резонансная фаза  $\Psi_{-, n-1}$  зависит от времени. В дальнейшем для упрощения обозначений будем опускать индексы  $-$  и  $n-1$  у фазы и амплитуды. В (3.77) не учитывается действие продольного электрического поля, так как рассматривается движение частиц, останавливающихся вблизи от точки циклотронного резонанса, а также электрического поля с ионной поляризацией, поскольку обычно реальный интерес представляют длинноволновые колебания с  $\xi_e = k_{\perp} \rho_e \ll 1$ .

При тех же предположениях, что использовались и выше, уравнение для поперечной скорости принимает вид

$$\dot{v}_{\perp} = -(eE/m_e) \sin(\Psi(t)). \quad (3.78)$$

При анализе (3.77), (3.78) используем метод последовательных приближений, считая электрическое поле колебаний достаточно слабым

$$E \ll B_0 \frac{v_{\perp}}{c} \left( \frac{\rho_e}{L_0} \right)^{2/3}, \quad \text{где } L = \left| \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dz} \right|_{z=z_S}, \quad z_S \text{ — резонансная точка.}$$

В нулевом приближении по амплитуде электрического поля поперечная скорость электронов в окрестности точки поворота постоянна, и, следовательно, электроны движутся вдоль магнитного поля с постоянным ускорением  $a_{\perp} = v_{\perp 0}^2/2L$ . (Для определенности



рассматривается точка поворота, лежащая слева от минимума магнитного поля, в которой  $\partial B_0/\partial z < 0$ .) В этом приближении фаза

$$\Psi(t) = -\omega t \frac{z_R - z_S}{L} + \frac{k_{\parallel} a_0 t^2}{2} + \frac{\omega a_0 t^3}{6L} + \Psi_0. \quad (3.79)$$

Здесь  $z_R$  — точка отражения, в которой продольная скорость обращается в нуль; начало отсчета времени взято в момент остановки частицы в точке  $z_R$ .

Найдем из (3.78) поправку к  $v_{\perp}$ , вызванную действием электрического поля, затем линеаризуем (3.77) по амплитуде электрического поля и проинтегрируем это уравнение дважды по времени. Преобразуя результат интегрирования по частям, получаем

$$z_1(t) = \frac{t^2}{2} \frac{eE}{m_e} \frac{v_{\perp}}{L} J^{(0)} + t \frac{eEv_{\perp}}{m_e} \left( -\frac{k_{\parallel}}{\omega} J^{(0)} + \frac{1}{L} J^{(1)} \right) + \frac{eEv_{\perp}}{m_e} \left( \frac{k_{\parallel}}{\omega} J^{(1)} - \frac{1}{2L} J^{(2)} \right), \quad (3.80)$$

где  $J^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} dt t^k \sin[\Psi(t)]$ . Выражение (3.80) описывает влияние ре-

зонансного циклотронного взаимодействия на движение заряженных частиц вдоль магнитного поля. Поскольку в рассматриваемом случае предполагается, что частица проходит через резонансную область при конечном (малом) значении времени, то расширение интервала интегрирования на всю временную ось не должно сказаться на значении интегралов  $J^{(k)}$  (см. также приложение П.6)

Выражение (3.80) можно представить в виде

$$z_1(t) = a_1 t^2 / 2 + v_{\parallel 1}(t) + \Delta z_R,$$

где  $a_1$  — изменение ускорения в результате резонансного взаимодействия с колебаниями;  $v_{\parallel 1}$  — добавка к скорости продольного движения;  $\Delta z_R$  — сдвиг точки отражения. Поскольку невозмущенная траектория имеет вид  $z_0 = a_0 t^2 / 2 + z_R$ , то дополнительный сдвиг  $\Delta z'_R$ , вызванный изменением момента отражения, оказывается величиной второго порядка по амплитуде электрического поля, и им можно пренебречь.

Интегралы  $J^{(k)}$  выражаются через функцию Эйри и ее производные

$$\left. \begin{aligned} J^{(0)} &= \frac{2\pi}{\alpha_3^{1/3}} \text{Ai}(g) \sin \Psi_0; \\ J^{(1)} &= -\frac{2\pi}{\alpha_3^{4/3}} \text{Ai}(g) \sin \Psi_0 + \frac{2\pi}{\alpha_3^{4/3}} \text{Ai}'(g) \cos \Psi_0; \\ J^{(2)} &= \frac{2\pi}{\alpha_3} \left( \text{Ai}''(g) + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_3} \text{Ai}(g) \right) \sin \Psi_0 + \frac{4\pi\alpha_2}{\alpha_3^{5/3}} \text{Ai}'(g) \cos \Psi_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

где  $g = \alpha_3^{-4/3} (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2)$ ;  $\alpha_1 = \omega z_R / L$ ;  $\alpha_2 = k_{\parallel} a_0 / 2$ ;  $\alpha_3 = \omega a_0 / 2L$ . Следует заметить, что интеграл  $J^{(2)}$ , строго говоря, не определен, и поэтому его вычисление дифференцированием под знаком интеграла требует обоснования. Правомерность такого способа вычисления  $J^{(2)}$  при нахождении  $\Delta z_R$  показана в приложении П.6.

С помощью (3.80), (3.81) получаем следующее выражение для смещения точки отражения под действием циклотронных колебаний:

$$\Delta z_R = \frac{2\pi e v_{\perp 0} (z_R - z_S)}{m_e a_0 L \alpha_3^{1/3}} \text{Ai}(g) \sin \Psi_0. \quad (3.82)$$

Приведем также выражение для изменения энергии электрона, вызванного резонансным циклотронным взаимодействием:

$$\Delta \varepsilon = -e v_{\perp 0} E \int_{-\infty}^{\infty} dt \sin \Psi(t) = -\frac{2\pi e E v_{\perp 0}}{\alpha_3^{1/3}} \text{Ai}(g) \sin \Psi_0. \quad (3.83)$$

В соответствии с анализом, проведенным в конце п. 3.1.4, выражение (3.83) согласуется с результатами, полученными в п. 2.3.1.

Из (3.82), (3.83) следует, что если  $\Delta \varepsilon > 0$ , то  $\Delta z_R > 0$  при  $z_R < z_S$  и  $\Delta z_R < 0$  при  $z_R > z_S$ . Поскольку выше считалось  $dB_0/dz < 0$ , это означает, что увеличение энергии электронов в результате резонансного циклотронного взаимодействия сопровождается приближением точки отражения  $z_R$  к точке циклотронного резонанса  $z_S$ . Для частиц, у которых точка отражения лежит за точкой циклотронного резонанса ( $z_R < z_S$ ), этот результат вполне естествен (см. выше). Более неожиданно обращение в нуль и даже изменение знака  $\Delta z_R$  при переходе точки отражения через точку циклотронного резонанса.

Состояние заряженных частиц, движущихся в неоднородном магнитном поле, принято характеризовать значениями энергии поперечного и продольного движения, отнесенными к минимуму магнитного поля на данной силовой линии ( $\varepsilon_{\perp 0}$ ,  $\varepsilon_{\parallel 0}$ ). Вне резонансной зоны сохраняются полная энергия электрона и его магнитный момент, поэтому изменения  $\varepsilon_{\perp 0}$  и  $\varepsilon_{\parallel 0}$ , вызванные резонансным взаимодействием, можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{\perp 0} &= \frac{B_0}{B_S} \Delta \varepsilon; \\ \Delta \varepsilon_{\parallel 0} &= \frac{B_S - B_0}{B_S} \Delta \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

где  $B_S$  — значение магнитного поля в резонансной точке;  $\psi_S$  — перепад потенциала от минимума магнитного поля до резонансной точки; штрих означает дифференцирование по продольной координате  $z$ . Для определенности предполагается, что потенциал возрастает с удалением от минимума магнитного поля. Такое пове-

дение потенциала характерно, например, для адиабатических ловушек.

На плоскости  $(\epsilon_{\perp 0}, \epsilon_{\parallel 0})$  частицы, достигающие точки  $z_S (|z_R| > > |z_S|)$ , располагаются выше прямой 1 (рис. 3.9), на которой  $\epsilon_{\parallel 0} = \epsilon_{\perp 0} (B_S/B_0 - 1) + e\psi_S$ .

Из-за того что резонансная зона имеет конечный размер, в резонансном взаимодействии участвуют также электроны, не доходящие до резонансной точки на расстояние порядка  $\delta z_S \approx L^{1/3} \rho_e^{2/3}$ .

На рис. 3.9,а такие частицы расположены между прямой 1 и пунктирной кривой 2. Расстояние между этими линиями по оси ординат  $\delta \epsilon_{\parallel 0} \approx (\epsilon_{\perp 0} B'_S/B_0 + e|\psi_S|) \delta z_S$ .

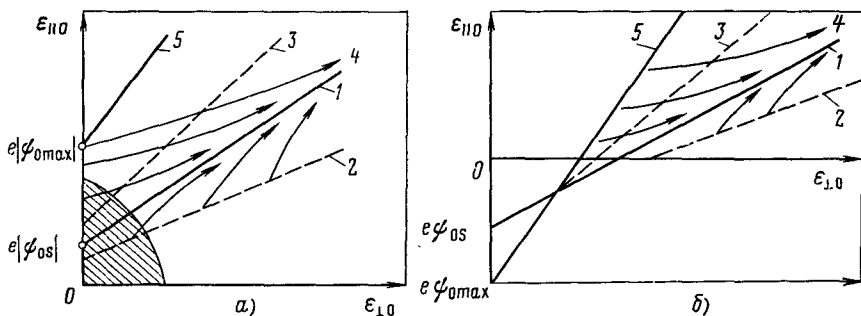


Рис. 3.9. Движение заряженных частиц на плоскости  $\epsilon_{\perp 0} - \epsilon_{\parallel 0}$  под действием циклотронных колебаний:

а) электронный циклотронный резонанс; на прямой 1 ( $\epsilon_{\parallel 0} = (B_S/B_0 - 1) \epsilon_{\perp 0} + e|\psi_S|$ ) располагаются электроны, останавливающиеся в резонансной точке; между пунктирными кривыми 2 и 3 — электроны, останавливающиеся в пределах резонансной зоны

$$z_S - \frac{1}{2} \delta z_S < z_R < z_S + (1/2) \delta z_S;$$

электроны, лежащие над кривой 4, высыпаются из ловушки; 5 — граница конуса потерь; направление диффузии электронов под действием циклотронных колебаний показано стрелками; область, первоначально занятая электронами, заштрихована;

б) то же, что на рис. 4,а, в случае ионного циклотронного резонанса в адиабатической ловушке

В результате взаимодействия с циклотронными колебаниями частицы перемещаются по плоскости  $(\epsilon_{\perp 0}, \epsilon_{\parallel 0})$ . Из формулы (3.84) следует, что частицы перемещаются параллельно прямой 1. Если энергия электронов увеличивается, то ихpitch-угол  $\chi = \arctg(\epsilon_{\perp 0}/\epsilon_{\parallel 0})^{1/2}$  стремится к  $\chi_S = \arctg(B_S/B_0 - 1)^{-1/2}$ . Для таких электронов, в соответствии со сказанным выше, точка  $z_r$  сближается с точкой циклотронного резонанса. При распределениях типа максвелловского электроны располагаются на плоскости  $(\epsilon_{\perp 0}, \epsilon_{\parallel 0})$  в окрестности начала координат. Диффузия, возникаю-

щая под действием циклотронных колебаний, должна выравнивать функцию распределения электронов вдоль линий, по которым они смещаются. Это означает, что диффузионные потоки будут направлены от начала координат, т. е. так, как указано стрелками на рис. 3.9,а. Таким образом, основная часть электронов, участвующих в резонансном циклотронном взаимодействии, движется параллельно прямой 1, удаляясь от начала координат. Исключение составляет небольшая группа электронов, расположенных над тонкой кривой 4, которые в конце концов выбрасываются из ловушки. Число таких электронов должно быть невелико, так как обычно перепад потенциала от центра открытой ловушки до пробки значительно превышает среднюю энергию электронов. Заметим, что то же самое электрическое поле выталкивает ионы из простой открытой ловушки. Соответственно в случае ионного циклотронного резонанса рис. 3.9,а заменяется рис. 3.9,б. Очевидно, что при таком расположении линий, характеризующих движение частиц по плоскости  $\epsilon_{\perp 0}$ ,  $\epsilon_{\parallel 0}$ , их потери из ловушки могут быть весьма значительными.

По мере движения частиц вдоль прямой 1 эффективность нагрева возрастает как из-за увеличения баунс-частоты  $\omega_b = v_{\perp 0}/L_0$ , так и из-за роста энергии, которой обменивается частица с колебаниями в одном акте резонансного циклотронного взаимодействия  $\Delta \epsilon$  [см. (3.83)]. В этом выражении множитель, стоящий перед функцией Эйри, пропорционален  $v_{\perp 0}^{1/3}$ , а сама функция Эйри при  $z_R = z_S$  ( $g=0$ ) принимает значение, близкое к максимальному  $Ai(0) \approx 0,35$  (функция Эйри максимальна  $\max Ai \approx 0,54$  при  $g \approx -1$ ).

Все частицы, расположенные на плоскости ( $\epsilon_{\perp 0}$ ,  $\epsilon_{\parallel 0}$ ) на прямой 1, отражаются от области максимума магнитного поля в одной и той же точке, совпадающей с резонансной ( $z_R = z_S$ ). Такие частицы называют плещущимися (sloshing particles).

Плещущиеся частицы проводят относительно много времени в окрестности точки циклотронного резонанса, поэтому их появление сопровождается увеличением плотности частиц соответствующего сорта в резонансной области. Сохранение квазинейтральности плазмы достигается изменением электрического потенциала. Например, область электронного циклотронного резонанса должна заряжаться отрицательно. Такое электрическое поле отталкивает медленные электроны от резонансной области. Если провал потенциала достаточно большой, то возникнут две популяции медленных электронов, движущихся по разные стороны от области циклотронного резонанса. Они не обмениваются между собой энергией и, следовательно, могут иметь различную температуру. Это явление можно использовать для создания термобарьера, играющего важную роль в проектах термоядерных реакторов на основе амбиоплярных ловушек [163].

Размах колебаний плещущихся электронов вдоль магнитного поля зависит от соотношения между  $\omega$  и  $\omega_{e0}$ . Если  $\omega \rightarrow \omega_{e0}$ , то имеет место ситуация, изложенная в предыдущем подразделе. В этом

случае диффузионное затягивание в минимум магнитного поля является первой стадией процесса, заканчивающегося просвистом. Образование группы электронов с  $v_{\perp 0} \gg v_{\parallel 0}$ , локализованных в окрестности минимума магнитного поля, по-видимому, наблюдалось в экспериментах [164, 165]. Какую долю из их числа составляли просвистные электроны, сказать трудно, однако сам факт возникновения группы электронов с  $v_{\perp 0} \gg v_{\parallel 0}$ , локализованных в окрестности минимума магнитного поля, установлен весьма убедительно. В [164] эти электроны были названы анизотропно перегретыми. Цель экспериментов [164, 165] состояла в изучении так называемой дрейфово-конусной неустойчивости [13], характерной для открытых магнитных ловушек. В [164, 165] было обнаружено, что эта неустойчивость стабилизируется под действием подаваемого извне импульса электромагнитных колебаний с частотой, примерно равной электронной циклотронной частоте в центре ловушки  $\omega_e$ . Чтобы объяснить это явление, было выдвинуто предположение, что действие электромагнитных колебаний ведет к образованию слоя анизотропно перегретых электронов. (Обычно в открытых ловушках электроны имеют изотропное распределение по скоростям и удерживаются амбиполярным электрическим полем, см. рис. 3.9, а.) Если в центр ловушки затягивается группа «анизотропных» электронов, удерживаемых магнитной ямой, то, как было отмечено выше, в этой области образуется ямка электрического потенциала. В ней накапливаются холодные ионы, что и ведет к стабилизации дрейфово-конусной неустойчивости [23].

Образование группы плещущихся заряженных частиц (ионов) зарегистрировано также в экспериментах [166].

**3.3.3. «Затыкание пробок» адиабатических ловушек.** В предыдущем подразделе было показано, что воздействие электрического поля циклотронных колебаний приводит к сближению точки отражения частицы от магнитной пробки с точкой циклотронного резонанса. Этот результат был получен при условии  $(v_{\perp}/c)(\rho_e/L)^{2/3} \gg E_-/B$ , т. е. для частиц с достаточно высокой энергией. В обратном предельном случае низкоэнергетических частиц преобладает противоположная тенденция: циклотронные колебания отталкивают частицы от резонансной зоны. Этот эффект обусловлен сильным возрастанием поперечной скорости с приближением к резонансной точке  $v_{\perp 1} \approx eE_-/m_e(\omega_e(z) - \omega)$ , что ведет к росту диамагнитной силы  $F = -\mu \nabla B$ . В результате частицы с малой продольной скоростью оказываются не в состоянии подойти к точке циклотронного резонанса.

При анализе этого эффекта достаточно рассмотреть движение на интервалах времени, малых по сравнению с периодом колебаний. Поэтому вводить канонические переменные для продольной степени свободы не нужно. Производя в исходном гамильтониане (3.1) преобразования (3.2), (3.4), а также переходя к фазе

$$\Phi = \int_0^t \omega_e(t') dt - \omega t, \quad \text{получаем}$$

$$H = p_{\parallel}^2/2m_e + J_{\perp}\Delta\omega - eE_{-}(2J_{\perp}m_e v_e)^{1/2} \sin \Phi,$$

где  $\Delta\omega = \omega_e(z) - \omega$ .

Введем новые переменные\*:

$$\left. \begin{aligned} I_{\perp} &= J_{\perp} - 2J_{\perp}^{1/2} a_{\perp} \sin \Phi + a_{\perp}^2; \\ \alpha_{\perp} &= \Phi - \arcsin[(a_{\perp}/I_{\perp}^{1/2}) \cos \Phi], \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

где  $a_{\perp} = eE_{-}/\Delta\omega(2m_e v_e)^{1/2}$ .

Преобразование (3.85) описывается производящей функцией

$$F = I_{\perp}\Phi + a_{\perp}^2(\cos(2\Phi) - \cos\Phi(I_{\perp}/a_{\perp}^2 - \cos^2\Phi)^{1/2}) - \\ - I_{\perp} \arcsin[(a_{\perp}/I_{\perp}^{1/2}) \cos \Phi] + zp'_{\parallel}.$$

В случае однородного магнитного поля переменные  $I_{\perp}$ ,  $\alpha_{\perp}$  были бы каноническими. При неоднородном магнитном поле переход к новому продольному импульсу  $p'_{\parallel} = p_{\parallel} - \partial F/\partial z$  приводит к появлению фазы в гамильтониане:

$$H = I_{\perp}\Delta\omega - e^2 E_{-}^2/2m_e v_e \Delta\omega + \frac{1}{2m_e} p_{\parallel}^2(p'_{\parallel}, z, I_{\perp}, \alpha_{\perp}). \quad (3.86)$$

Геометрическая интерпретация преобразования (3.85) дана на рис. 3.10. На нем траектория электрона имеет вид окружности, центр которой сдвинут относительно начала координат на расстояние  $a_{\perp}$ . Из (3.86) следует, что в случае однородного магнитного поля электрон вращается по этой окружности с постоянной частотой  $\Delta\omega = \omega_e - \omega$ . Поскольку замена фазы ларморовского вращения  $\varphi$  на  $\Phi = \varphi - \omega t$  эквивалентна переходу в систему координат, вращающуюся с частотой волны  $\omega$ , то в исходной системе  $(v_x, v_y)$  траектория электрона представляет собой суперпозицию двух вращений.

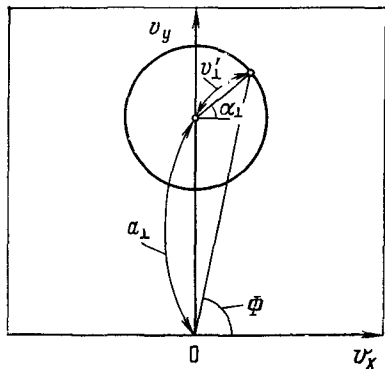
Если неоднородность магнитного поля достаточно мала, так что выполняется условие  $(eE_{-}/Lm_e v_e \Delta\omega)(\omega_e/\Delta\omega)^{3/2} \ll 1$ , то в (3.86) можно положить  $p'_{\parallel} \approx p_{\parallel}$ . В этом случае зависимость от фазы  $\alpha_{\perp}$  в (3.86) в первом приближении по  $1/L$  выпадает, и величина  $I_{\perp}$  оказывается инвариантной. В том же приближении для силы, действующей на электрон в продольном направлении, находим выражение

$$F_z = - \left( I_{\perp} + \left( \frac{eE_{-}}{\Delta\omega} \right)^2 \frac{1}{2m_e v_e} \right) \frac{\partial \omega_e}{\partial z}. \quad (3.87)$$

\* Это преобразование было рассмотрено совместно с А. В. Звонковым.

Рис. 3.10. Геометрическая интерпретация преобразований (3.85):

$$v_{\perp}^2 = J_{\perp}^2 2\omega_e/m_e; \quad v'_{\perp}^2 = I_{\perp}^2 2\omega_e/m_e$$



Оно может быть также получено менее строгим, но более наглядным способом. В присутствии циклотронных колебаний поперечная скорость электрона получает приращение  $v_{\perp} \rightarrow v_{\perp} + (eE_{-}/m_e\Delta\omega) \cos \Phi$ . Подставляя новое значение поперечной скорости в выражение для магнитного момента и производя усреднение по фазе  $\Phi$ , для диамагнитной силы  $F_z = -\langle \mu \rangle \partial B / \partial z$  получаем выражение (3.87). По существу при таком подходе переменная составляющая поперечной скорости, пропорциональная  $E$ , считается малой. Строгая формулировка метода последовательных приближений дана в [143].

Сила (3.87) и потенциальная энергия продольного движения [второе слагаемое в (3.86)] неограниченно возрастают по мере приближения к точке циклотронного резонанса. Однако высота реального потенциального барьера, отделяющего резонансную точку от области, где  $\omega > \omega_e$ , остается конечной. Дело в том, что в резонансной области  $I_{\perp}$  изменяется под действием циклотронных колебаний, при этом описание продольного движения в терминах эквивалентной потенциальной энергии становится неверным.

Оценим максимальное значение разности  $\Delta\omega$ , которое определяет высоту эффективного потенциального барьера  $U_{\max} = (eE_{-})^2 / 2m_e\omega_e |\Delta\omega|$ .

Приведенное выше условие на характерный масштаб изменения магнитного поля  $L$  можно представить в виде  $\Delta\omega \gg \Delta\omega_1 = (eE_{-}/m_e\omega_e^2 L)^{2/3} \omega_e$ . Но при малой амплитуде колебаний,  $(v_{\perp}/c)(\rho_e/L)^{2/3} \gg E_{-}/B_0$  (см. предыдущий подраздел), размер резонансной зоны равен  $\delta z_S \approx L^{1/3} \rho_e^{2/3}$  и, следовательно, должно выполняться условие  $\Delta\omega \gg \Delta\omega_2 = \omega_e (\rho_e/L)^{2/3}$ , где  $\Delta\omega_2$  — изменение циклотронной частоты в пределах резонансной зоны. Таким образом, реальная высота потенциального барьера не превышает  $U_{\max} = e^2 E_{-}^2 / 2m_e \omega_e \Delta\omega$ , где  $\Delta\omega = \max(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2)$ .

Частицы, продольная энергия которых меньше  $U_{\max}$ , отражаются от эффективного потенциального барьера. Таким образом, циклотронные колебания достаточно высокой амплитуды могут существенно улучшить удержание заряженных частиц в адиабатических ловушках. Предложение об использовании циклотронных колебаний для затыкания пробок адиабатических ловушек было сделано в [167], где анализировалось удержание электронов.

Экспериментальные работы в этом направлении в настоящее время ведутся в Нагое (Япония). Здесь последовательно сооружается ряд магнитных ловушек с возрастающими размерами и мощностью ВЧ-колебаний (ловушки с остроугольной геометрией серии RCF). В этих установках ВЧ-колебания используют для удержания ионной компоненты плазмы. Результаты теоретического и экспериментального анализа поведения плазмы в ловушках с остроугольной геометрией магнитного поля, дополненных ВЧ-пробками, приведены в [168—171], а также в обзорной работе [172]. Первоначальный этап исследования движения заряженных частиц в неоднородном магнитном поле при наличии ВЧ-колебаний отражен в обзорной работе [173]. На этом этапе большое внимание уделялось использованию ВЧ-колебаний для ускорения заряженных частиц.



## ПРИЛОЖЕНИЯ

### П.1. Решение уравнения [2.13]

Решение уравнения (2.13) удобно представить в виде контурного интеграла

$$E(Z) = \int_C \frac{dt}{1+t^2} \exp\left(Zt + \frac{it^2}{4b_*^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{t-i}{t+i}\right)\right), \quad (\text{П.1.1})$$

где  $Z=z\omega/c$ ;  $b_*^2=c^2/2L\omega v_{\parallel}$ . Контур интегрирования  $C$  выбирается таким образом, чтобы на его концах подынтегральное выражение обращалось в нуль. Каждый из возможных контуров соответствует одному из решений уравнения (2.13).

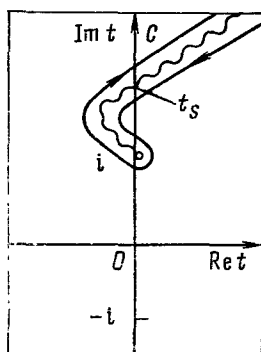
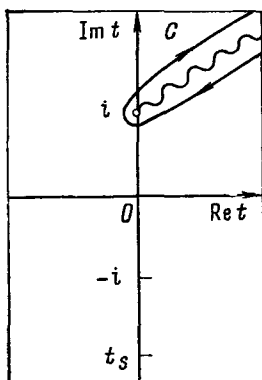


Рис. П.1.1. Плоскость комплексного переменного  $t$  при  $Z < 0$ ;

Рис. П.1.2. То же, что на рис. П.1.1, при  $Z > 0$

~~~~~ — разрез, выходящий из точки ветвления  $t=i$ ;  $t_s$  — точка перевала;  
 $C$  — контур интегрирования

Контур, изображенный на рис. П.1.1, дает при  $Z \rightarrow -\infty$  волну, распространяющуюся со стороны большего магнитного поля. При интегрировании по этому контуру интеграл (П.1.1) определяется точкой ветвления  $t=i$  [см. (2.14)]. Если переход к положительным значениям  $Z$  осуществлять через верхнюю полуплоскость (правило обхода Ландау), то при  $Z > 0$  контур интегрирования принимает вид, изображенный на рис. П.1.2. В этом случае в интеграле (П.1.1) наряду с вкладом точки ветвления необходимо учитывать вклад точки перевала  $t_s = = 2ib_*^2 Z$  [см. (2.15)], который соответствует псевдоволне.

## П.2. Модификация правила обхода

При использовании адиабатического волнового уравнения вся информация о процессах, происходящих в окрестности резонансной точки, вводится через правило обхода. В ограниченных системах, когда при многократном прохождении частиц через резонансную точку отдельные акты резонансного взаимодействия можно считать независимыми, следует использовать правило обхода Ландау. В противном случае при учете эффектов «памяти» правило обхода следует модифицировать [127].

Рассмотрим эту проблему на примере задачи о колебаниях, падающих на адиабатическую ловушку. Предположим, что колебания распространяются вдоль магнитного поля со стороны отрицательных значений координаты  $z$ . Предположим также, что резонансное условие  $\omega = \omega_e(z)$  выполняется вдали от минимума магнитного поля. В этом случае в окрестности резонансной точки волновое уравнение (2.17) сводится к уравнению Уиттекера (см. п. 2.2.1). Интересующее нас решение, описывающее в области  $z > 0$  волну, бегущую направо, имеет вид  $E_- = W_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(z_1)$  [см. (2.25)]. Здесь  $z_1 = -2i(\omega/c)z$ , начало отсчета выбрано в резонансной точке. Функция  $W_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(z_1)$  имеет логарифмическую особенность в точке  $z_1 = 0$   $E_- \approx 1 + (i\Gamma/2\pi)z_1 \ln z_1$  ( $z > 0$ ). Возможные способы продолжения  $\ln z$  через эту точку представим в виде

$$\ln |z| + i\pi(1-\lambda) \rightleftharpoons \ln z. \quad (\text{П2.1})$$

При  $\lambda = 0$  получаем правило обхода Ландау.

Согласно (П2.1) в области  $z < 0$  ( $|z_1| \ll 1$ ) имеем  $E_- \approx 1 + (i\Gamma/2\pi)z_1 \ln z_1 - (\Gamma/2)(1-\lambda)z_1$ . Учитывая приближенное выражение для функции  $W_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(z_1)$ , при  $|z_1| \rightarrow 0$  (см. выше), а также для второго линейно независимого решения уравнения Уиттекера  $M_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(z_1) \approx z_1$ , получаем, что в области  $z < 0$  решение волнового уравнения дается выражением  $E_- \approx W_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(z_1) + (\lambda\Gamma/2)M_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(z_1)$ . С помощью асимптотических выражений (2.25), (2.28) находим плотность потока энергии падающей  $S_{\text{пад}} = (c\Gamma/4\pi)(1-\lambda/2)^2$  и отраженной  $S_{\text{отр}} = (c\Gamma/4\pi)(\lambda/2)^2$  волн. Здесь для простоты считается  $\Gamma \gg 1$  и опущены члены порядка  $e^{\mp\Gamma}$ .

Введение в правило обхода величины  $\lambda \neq 0$  привело к появлению отраженной волны и изменению количества энергии, поглощаемой в резонансной точке  $\Delta W = S_{\text{пад}} - S_{\text{отр}}$ . (Амплитуда прошедшей волны при  $\Gamma \gg 1$  пренебрежимо мала.)

Величина  $\Delta W$  может быть рассчитана так же, как работа, производимая волной над частицами плазмы:

$$\Delta W = \text{Re} \int dz j E = - (c^2/4\pi\omega) \text{Im} E^*(0) \frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{-e}^e.$$

Соотношение, связывающее  $\Delta W$  со скачком  $\partial E/\partial z$  в резонансной точке, можно получить из волнового уравнения (2.17) [174].

Используя приведенное выше выражение для  $E_-(z)$  при  $z \rightarrow 0$ , получаем  $\Delta W = (c\Gamma/4\pi)(1-\lambda) = S_{\text{пад}} - S_{\text{отр}}$ . Работа, производимая электрическим полем, разумеется, равна энергии, полученной частицами  $\Delta W = \int dv_{\parallel} v_{\parallel} f_0(v_{\parallel}) \Delta \epsilon$ , где  $\Delta \epsilon$  — изменение энергии одного электрона в результате резонансного взаимодействия.

В § 3.2 было получено выражение (3.52) для  $\Delta\varepsilon$ , учитывающее эффекты многократного прохождения электронов через резонансную точку:  $\Delta\varepsilon = (e^2/2m) \times E^2(0) (\delta t_s)^2 (1 - \gamma_\sigma^2) (1 + \gamma_\sigma^2)^{-1}$ . В линейно меняющемся поле  $\delta t_s = (2\pi/v_{\parallel}) \times \int \times d\omega_e/dz)^{1/2}$  (см. п. 3.2.4), и поэтому для  $\Delta W$  получаем выражение  $\Delta W = (c\Gamma/4\pi) (1 - \gamma_\sigma^2) / (1 + \gamma_\sigma^2)$ . Сопоставляя его с полученным выше  $\Delta W = (c\Gamma/4\pi) \times (1 - \lambda)$ , определяем величину  $\lambda$ , входящую в модифицированное правило обхода:  $\lambda = 2\gamma_\sigma^2 / (1 + \gamma_\sigma^2)$ .

### П.3. Правило обхода Ландау при ускоренном движении электронов

Будем считать для простоты, что все электроны движутся с одним и тем же ускорением  $a[z(\tau) = z + v_{\parallel} \tau + (1/2) a \tau^2]$ . При наличии ускорения можно использовать то же выражение для тока, что и в случае равномерного движения (2.18), изменив в нем фазу  $\Phi(\tau, z, v_{\parallel}) \rightarrow \Phi_*(\tau, z, v_{\parallel}) = \Delta\tau - \delta_* \tau^2 + \varepsilon_* \tau^3$ , где  $\delta_* = \delta - ka/2$ ;  $\varepsilon_* = \omega a/6L$ . В п. 2.3.1 при анализе выражения (2.18) первым вычислялся интеграл по  $d\tau$ . Теперь удобно сначала проинтегрировать по  $dv_{\parallel}$ . В получаемом при этом выражении учитывается вклад всех электронов, в том числе и тех, которые останавливаются в резонансной точке:

$$j_{-} = - \frac{e^2 n_0}{m_e \omega (2\pi)^{1/2}} \int dk E_{-}(k) \int_0^{\infty} dx \exp(i\Delta\Omega(z)x + F(x)), \quad (\text{ПЗ.1})$$

где  $\Delta\Omega(z) = (\omega - \omega_e(z))/\omega$ ;  $F(x) = i\gamma_1 x(x + x^3/3\gamma_2) - \gamma_3 x^2(1 + x/2\gamma_2)^2$ ;  $\gamma_1 = ka/2\omega^2$ ;  $\gamma_2 = kL$ ;  $\gamma_3 = k^2 v_T e^2/2\omega^2$ .

Интегрируя (ПЗ.1) три раза по частям, получаем

$$j_{-} = j_{-}^0 - \frac{ie^2 n_0}{m_e \omega (2\pi)^{1/2}} \int dk E_{-}(k) J(k, z),$$

где  $j_{-}^{(0)}$  дается (2.24) и

$$J(k, z) = \frac{1}{[\Delta\Omega(z)]^3} \int_0^{\infty} dx \exp[i\Delta\Omega(z)x] \frac{d^3}{dx^3} \exp[i\tau(x)]. \quad (\text{ПЗ.2})$$

Интеграл (ПЗ.2) удобно вычислить методом перевала. Предположим сначала, что ускорение отсутствует ( $\gamma_1 \propto a = 0$ ). Значение интеграла определяется начальной точкой интервала интегрирования  $x=0$  и точкой перевала  $x_1$  при  $0 < \arg(z - z_s) < \pi$ , лежащей в первом квадрате плоскости комплексного переменного  $x$ . На достаточно больших расстояниях от резонансной точки, когда выполняется условие  $|\Delta\Omega(z)| \gg \gamma_2 \gamma_3$ , имеем  $x_1 \approx (i\Delta\Omega(z) \gamma_2^2 / \gamma_3)^{1/3}$ .

Точка  $x=0$  дает вклад в интеграл, пропорциональный  $1/\Delta\Omega$ , а точка  $x_1$  — пропорциональный  $\exp[(3i/8)\Delta\Omega x_1]$ . В результате получаем, что при  $-\pi/8 < \arg z < 5\pi/8$   $j_{-} \approx j_{-}^{(0)}$ . Однако если  $5\pi/8 < \arg z < 7\pi/8$ , то вклад точки перевала в (ПЗ.2) оказывается определяющим. В этой области нельзя использовать упрощенное адиабатическое волновое уравнение (2.17).

Учтем теперь влияние ускорения. Предположим, что выполняется условие  $v_{Te}^2 \gg a(\rho_e L)^{1/2}$ . Оно означает, что скорость электронов мало изменяется в пределах резонансной зоны. В этом случае учет членов, пропорциональных ускорению, в выражении для  $F(x)$  приводит лишь к слабому сдвигу точки перевала  $x_1$ . Изменение предэкспоненциального множителя также невелико. Таким образом, приходим к заключению, что наличие ускорения не препятствует возможности использования правила обхода Ландау.

#### П.4. О теореме взаимности

Для немагнитной плазмы справедлива теорема взаимности [175], из которой, в частности, следует, что коэффициент прохождения электромагнитных колебаний через произвольный участок неоднородной среды не зависит от направления распространения колебаний. При наличии магнитного поля для справедливости теоремы взаимности необходимо, чтобы одновременно с обращением направления распространения колебаний переворачивалось и магнитное поле [175]. Для колебаний, распространяющихся навстречу друг другу в фиксированном магнитном поле, коэффициенты прохождения через неоднородную среду могут оказаться различными. Более того, как отмечено в [176], с помощью постоянного магнитного поля можно создать радиовентиль, пропускающий радиоволны лишь в одном направлении. Существенными элементами такого устройства являются николи, пропускающие электромагнитные волны вполне определенной поляризации, а роль постоянного магнитного поля сводится к повороту электрического вектора волны. Однако если не интересоваться поляризацией колебаний, то равенство коэффициентов прохождения колебаний, распространяющихся навстречу друг другу, по-видимому, сохраняется и при наличии магнитного поля.

Докажем это утверждение для колебаний, распространение которых описывается простейшим волновым уравнением вида

$$F''_{xx} + \epsilon(x)F = 0. \quad (\text{П4.1})$$

Предположим, что область, в которой среда сильно неоднородна (если такая область имеется), расположена в окрестности начала координат, а при  $|x| \rightarrow \infty$

решения (П4.1) приобретают квазиклассический вид  $F \approx F^{(0)} k^{-1/2} \exp\left(i \int^x k \, dx\right)$ ,

где  $k = \epsilon^{1/2}$ . В области, где  $\text{Im } \epsilon(x) = 0$ , т. е. где отсутствует обмен энергией между колебаниями и средой, постоянна величина  $S = \frac{i}{2}(F^*{}'_x F - F'_x F^*)$ , которая с точностью до множителя совпадает с потоком энергии в колебаниях. Для доказательства равенства  $S = \text{const}$  следует (П4.1) помножить на  $F^*$  и вычесть сопряженное выражение. Результат представляется в виде  $S_{x'} = 0$ . В квазиклассическом приближении имеем  $S = \text{sgn } k |F^{(0)}|^2$ .

Рассмотрим две волны, распространяющиеся навстречу друг другу. Величины, характеризующие волну, падающую слева, будем отмечать индексом 1, справа — 2. Запишем волновое уравнение (П4.1) для  $F_1$  и помножим его на  $F_2$ .

В полученном выражении поменяем  $F_1$  и  $F_2$  местами и вычтем из первого выражения второе:

$$F_2 F_{1,xx}'' - F_1 F_{2,xx}'' = 0. \quad (\text{П4.2})$$

Из (П4.2) следует, что величина  $S_* = F_2 F_{1,x}' - F_1 F_{2,x}'$  не зависит от координаты.

Рассмотрим величину  $S_*$  при  $x \rightarrow -\infty$ . В этой области присутствуют падающая волна 1, отраженная волна 1 и прошедшая волна 2.

Две последние имеют одинаковую пространственную зависимость, и поэтому слагаемое, содержащее произведение соответствующих полей, выпадают из выражения для  $S_*$ . Аналогичным образом при  $x \rightarrow -\infty$  в  $S_*$  дают вклад падающая волна 2 и прошедшая 1. В результате в квазиклассическом приближении оказывается справедливым равенство.

$$k_+ |F_{2,\text{пад}}| |F_{1,\text{прош}}| - k_- |F_{1,\text{пад}}| |F_{2,\text{прош}}| = 0, \quad (\text{П4.3})$$

где  $k_{\pm}$  равны значениям волнового вектора  $k$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  соответственно.

Поскольку в квазиклассическом приближении  $|F(x)| \approx F^{(0)} / \sqrt{k(x)}$ , то из (П4.3) следует

$$|F_{2,\text{прош}}^{(0)} / F_{2,\text{пад}}^{(0)}| = |F_{1,\text{прош}}^{(0)} / F_{1,\text{пад}}^{(0)}|.$$

Учитывая выражение для потока энергии (см. выше), приходим к заключению, что коэффициент прохождения не зависит от направления распространения колебаний.

### П.5. Уравнение квазилинейной диффузии электронов в адиабатических ловушках

Предположим, что в отсутствие колебаний функция распределения электронов зависит лишь от двух интегралов движения: энергии  $\epsilon$  и магнитного момента  $\mu$ . Будем считать, что электроны локализованы в окрестности минимума магнитного поля, где  $B(z) \approx B_0(1 + (z/L)^2)$ ,  $|z| \ll L$ . В этом случае вместо  $\epsilon$  и  $\mu$  удобно использовать приближенные интегралы  $w = v_{\perp}^2 \approx 2\epsilon/m_e$ ,  $v_{\perp 0}^2 = v_{\perp}^2 + \omega_b^2 z^2 \approx (2/m_e)(\epsilon - \mu B_0)$ . Продольная скорость электрона  $v_{\parallel}$  и  $z$ -координата изменяются по гармоническому закону  $v_{\parallel} = v_{\parallel 0} \sin[\vartheta(t)]$ ,  $z = (v_{\parallel 0}/\omega_b) \cos[\vartheta(t)]$ ,  $\beta(t) = \beta_0 + \omega_b t$ .

Используя линеаризованное по амплитуде внешнего поля кинетическое уравнение  $df_1/dt = (e/m_e) E df_0/dv$ , методом интегрирования по невозмущенной траектории находим возмущенные функции распределения электронов:

$$f_1 = \frac{e}{m_e} \frac{E_{-v+}}{i\omega} \left\{ \left[ 1 - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\omega - \omega_{e0}}{\Omega_p} A_p(q, \beta) \right] \frac{\partial f_0}{\partial w} - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{e0}}{\Omega_p} A_p(q, \beta) \frac{\partial f_0}{\partial v^2} \right\}.$$

Здесь  $A_p(q, \beta) = J_p(q) \exp(-iq \sin \beta + ip\beta)$ ;  $\Omega_p = \omega - \omega_{e0}(1 + v_{\parallel 0}^2/2\omega) + 2p\omega_b$ ; зависимость электрического поля от координат не учитывается.

Чтобы получить уравнение квазилинейной диффузии, учтем в кинетическом уравнении слагаемые, квадратичные по  $E$ :

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \text{Re} \frac{e}{m_e} E^* \frac{\partial f_1}{\partial v}, \quad (\text{П5.1})$$

а также предположим, что фаза  $\beta$  «сбивается» под действием случайных воздействий за время, существенно превышающее период колебаний электрона вдоль ловушки  $2\pi/\omega_b$ , но малое по сравнению с характерным временем изменения величин  $\omega$  и  $v_{\parallel 0}$ . Это предположение позволяет усреднить (П5.1) по фазе  $\beta$ . Процесс усреднения оказывается довольно громоздким. Приведем некоторые соотношения, использованные при вычислении правой части (П5.1) и ее усреднении:

$$E^* \frac{\partial f_1}{\partial v} = |E_-|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \omega f_0;$$

$$\frac{\partial q}{\partial \omega} = -\frac{q}{2\omega} (2 + \cos 2\beta);$$

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial \omega} = \omega_{e0} \frac{v_{\parallel 0}^4}{4\omega^2} (1 + 2\cos 2\beta) + \frac{p}{\omega^{1/2} L};$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \omega} A_p(q, \beta) \right\rangle_{\beta} = -\frac{1}{\omega} (p + 2q) J_p(q) J'_p(q) \text{ и т. д.}$$

Усреднение по  $\beta$  приводит к уравнению (3.10).

### П.6. Вычисление сдвига точки отражения электрона от магнитной пробки

Неопределенность в значении интеграла  $J^{(2)}$ , входящего в выражение для  $\Delta z_R$ , обусловлена бесконечными пределами интегрирования. Разумеется, в рассматриваемом случае бесконечность имеет условный характер. Фактически под бесконечным интервалом понимается интервал, существенно превышающий характерное время резонансного взаимодействия  $\delta t_S$ . Резонансное взаимодействие наиболее продолжительно для частиц, останавливающихся в точке циклотронного резонанса ( $z_R = z_S$ ), когда первое слагаемое в (3.79) обращается в нуль. Опуская в (3.79) также второе слагаемое, от которого можно избавиться сдвигом начала отсчета времени, для  $\delta t_S$  получаем оценку  $\delta t_S \ll (1/\omega_e) (L/\rho_e)^{2/3}$ . Если, как и в предыдущих подразделах, считать, что электрон колеблется на дне параболической магнитной ямы, то получим

$$L = \frac{2L_0^2}{|z_R|}, \quad |z_R| = L_0 \frac{v_{\parallel 0}}{v_{\perp 0}}; \quad \delta t_S \ll \frac{1}{\omega_e} \left( \frac{L_0}{\rho_e} \frac{v_{\perp 0}}{v_{\parallel 0}} \right)^{2/3}.$$

Рассмотрим решение уравнения (3.77) на интервалах времени порядка периода колебаний электрона вдоль магнитного поля  $\Delta t \sim \pi/\omega_b \gg \delta t_S$ , а затем перейдем к пределу  $t\omega_b \ll 1$ ; здесь  $\omega_b = v_{\perp 0}/L_0$  (см. п. 3.1.1). Содержащий неопределенность интеграл  $J^{(2)}$  обязан учету второго слагаемого в правой части (3.77).

С целью упрощения задачи опустим в правой части (3.77) первое слагаемое и линеаризуем это уравнение по амплитуде электрического поля:

$$\ddot{z}_1 + \omega_b^2 z_1 = -v_{\perp 0} v_{\perp 1}(t) z_0(t) L_0^{-2}. \quad (\text{П6.1})$$

Здесь  $z_0(t) = L_0 (v_{\parallel 0}/v_{\perp 0}) \cos(\omega_b t)$ ,  $v_{\perp 1}(t)$  определяется из (3.78).

Разрешим уравнение (П6.1) относительно  $z_1$ , проинтегрируем результат по частям и затем перейдем к пределу малого времени  $t \ll \omega_b^{-1}$ . При этом для составляющей  $z_1$ , не зависящей от времени, получаем следующее выражение:

$$\Delta z_R = -\frac{eE}{m_e} \tilde{J} \frac{v_{\parallel 0}}{L_0},$$

где

$$\tilde{J} = 2\omega_b^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \sin(\Psi(t)) (1 - \cos(2\omega_b t)).$$

Интеграл  $\tilde{J}$  сходится, и поэтому переход к бесконечным пределам интегрирования здесь вполне правомочен. Если подынтегральное выражение разложить по  $\omega_b t \ll 1$ , то получим  $J^{(2)} \approx \tilde{J}$ . Прямое вычисление  $\tilde{J}$  дает

$$\tilde{J} = 2\omega_b^2 [\text{Ai}(g) + (1/2)\text{Ai}(g_+) - (1/2)\text{Ai}(g_-)], \quad (\text{П6.2})$$

где  $g_{\pm} = g \pm 2\omega_b / (3\alpha_3)^{1/3}$ .

Для частиц, остающихся в пределах резонансной зоны, величина  $g$  может достигать значений  $g \sim \frac{\omega}{(3\alpha_3)^{1/3}} \left( \frac{p_e}{L_0} \frac{v_{\parallel 0}}{v_{\perp 0}} \right)^{2/3}$ . В этом случае

$\left| \frac{g_{\pm} - g}{g} \right| \sim \left( \frac{\delta z_S}{z_R} \right)^2$ , где  $\delta z_S \approx L_0^{1/3} p_e^{2/3} (v_{\parallel 0}/v_{\perp 0})^{2/3}$  — размер резонансной зо-

ны при  $z_R = z_S$ . Разлагая в (П6.2) функции Эйри по малой разности  $|g_{\pm} - g|$ , получаем  $\tilde{J} \approx J^{(2)}$ . Этот результат оправдывает упрощенный способ вычисления, использованный выше.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Budden K. G. Radio waves in the ionosphere. Cambridge, Cambr. Univ. Press, 1961. — 542 p.
2. Ратклифф Дж. А. Магнитно-ионная теория и ее приложения к ионосфере. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 248 с.
3. Стикс Т. Теория плазменных волн. М.: Атомиздат, 1965. — 342 с.
4. Лонгмайр К. Физика плазмы. М.: Атомиздат, 1966. — 340 с.
5. Эллис В., Буксбаум С., Берс А. Волны в анизотропной плазме. М.: Атомиздат, 1966. — 130 с.
6. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1970. — 206 с.
7. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. М.: Мир, 1971. — 437 с.
8. Электродинамика плазмы/ Ахиезер А. И. и др. М.: Наука, 1974. — 719 с.
9. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. М.: Атомиздат, 1975. — 272 с.
10. Ишимару С. Основные принципы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1975. — 287 с.
11. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. — 525 с.
12. Железняков В. В. Электромагнитные волны в космической плазме. М.: Наука, 1977. — 432 с.
13. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. — Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. М.: Атомиздат, 1977. — 360 с.
14. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. — 406 с.
15. Иоффе М. С., Кадомцев Б. Б. Удержание плазмы в адиабатических ловушках. — Успехи физ. наук, 1960, т. 100, с. 601—639.
16. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963, вып. 3, с. 3—140.
17. Пистунович В. И., Тимофеев А. В. Циклотронная неустойчивость анизотропной плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1967. — Вып. 5, с. 351—393.
18. Трубников Б. А. Универсальный коэффициент выхода циклотронного излучения из плазменных конфигураций. — В кн.: Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973, вып. 7, с. 274—300.
19. Тимофеев А. В. Циклотронные колебания плазмы в неоднородном магнитном поле. — Успехи физ. наук, 1973, т. 110, с. 329—355.
20. Балдвин Д., Бернштейн А., Винник М. Кинетическая теория плазменных волн. — В кн.: Достижения физики плазмы/ Под ред. А. Саймона, В. Б. Томсона/ Пер. под ред. М. С. Рабиновича. М.: Мир, 1974, с. 172—305.
21. Baldwin D. E. End-loss processes from mirror machines. — Rev. Mod. Phys., 1977, vol. 49, p. 317—340.
22. Чуянов В. А. Адиабатические магнитные ловушки. — В кн.: Итоги науки и техники (Физика плазмы)/ Под ред. В. Д. Шафранова. М.: ВИНТИ, 1980, т. 1, ч. 1, с. 119—165.
23. Аликаев В. В. ВЧ- и СВЧ-методы нагрева плазмы. — В кн.: Итоги науки и техники (Физика плазмы)/ Под ред. В. Д. Шафранова. М.: ВИНТИ, 1981, т. 1, ч. 2, с. 80—98.
24. Ломинадзе Д. Г. Циклотронные волны в плазме. Тбилиси: Мецниереба, 1975. — 222 с.
25. Тимофеев А. В. О механизме циклотронной неустойчивости. Препринт ИАЭ-2569. М.: 1975. — 13 с.
26. Веденов А. А., Рютов Д. Д. Квазилинейные эффекты в потоковых неустойчивостях. — В кн.: Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1972, вып. 6, с. 3—69.
27. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. Нелинейная теория плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973, вып. 7, с. 3—145.
28. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М., Наука, 1976. — 238 с.
29. Бишоп А. С. Программа США по управляемому термоядерному синтезу. М.: Атомиздат, 1960. — 175 с.



30. Sudan R. N., Rosenbluth M. N. Stability of axisymmetric field-reversed equilibria of arbitrary ion gyroradius. — *Phys. Fluids*, 1979, vol. 22, p. 282—293.
31. Саранцев В. П., Перельштейн Э. А. Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. М.: Атомиздат, 1979. — 214 с.
32. An investigation of cyclotron instability potential and adiabatic compression of a plasma in a mirror machine/ A. V. Bortnicov, N. N. Brevnov, V. G. Zhukovskii, M. K. Romapovskii. — *Plasma Phys.*, 1967, vol. 9, p. 641—648.
33. О работах на термоядерной экспериментальной установке ОГРА/ И. Н. Головин, Л. И. Артеменков, Г. Ф. Богданов и др. — *Успехи физ. наук*, 1961, т. 73, с. 685—700.
34. Ловушки с магнитными пробками/ М. Бино, Т. Консоли, П. Хуберт и др. — В кн.: *Физика плазмы и магнитная гидродинамика/ Пер. под ред. М. С. Рабиновича*. М.: Изд-во иностр. 1961, с. 135—214.
35. Burt P., Harris E. G. Unstable cyclotron oscillations in a cylindrical plasma shell. — *Phys. Fluids*, 1961, vol. 4, p. 1412—1416.
36. Перверзев Г. В. Ионно-циклотронная неустойчивость плазмы, созданной пучком быстрых ионов. — *Журн. техн. физ.*, 1972, т. 42, с. 1085—1088.
37. Timofeev A. V. Cyclotron oscillations of a large-larmor radius plasma. — *Nucl. Fus.*, 1978, vol. 18, p. 955—963.
38. Axis encircling ion gyroinstability/ P. J. Catto, R. E. Aamodt, M. N. Rosenbluth e. a. — *Phys. Fluids*, 1980, vol. 23, p. 764—770.
39. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М. Абрамовича, И. Стиган. М.: Наука, 1979. — 830 с.
40. Тимофеев А. В., Чулков Г. Н. Электронный циклотронный резонанс в неоднородном магнитном поле. *Физика плазмы*, 1979, т. 5, с. 1271—1280.
41. Суворов Е. В., Фрайман А. А. О циклотронном поглощении на первой гармонике при квазиперечном распространении. — *Изв. вузов. Радиофизика*, 1977, т. 20, с. 67—71.
42. Wave absorption near the electron cyclotron frequency/ I. Fidone, G. Granata, G. Ramponi, R. L. Meyer. — *Phys. Fluids*, 1978, vol. 21, p. 645—652.
43. Bornatici M., Engelmann F. Inverse magnetic bremsstrahlung around the electron-cyclotron frequency. — *Comments on Plasma Phys. and Control. Fus.*, 1979, vol. 4, p. 139—145.
44. Bornatici M., Engelmann F., Lister G. G. Finite larmor radius effects in the absorption of electromagnetic waves around the electron cyclotron frequency. — *Phys. of Fluids*, 1979, vol. 22, p. 1664—1666.
45. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Скрыдлов Н. В. Волны в плазме в окрестности циклотронных резонансов. — *Журн. техн. физ.*, 1963, т. 33, с. 922—928.
46. Shkarofsky I. P. Dielectric Tensor in Vlasov Plasma near cyclotron Harmonics. — *Phys. Fluids*, 1966, vol. 9, p. 561—570.
47. Peng Y. K. M., Borowski S. K., Kamnash T. Microwave start-up of tokamak plasmas near electron cyclotron and upper hybrid resonances. — *Nucl. Fus.*, 1978, vol. 18, p. 1489—1498.
48. Heating at the electron cyclotron frequency in the ISX-B tokamak/ R. M. Gilgenbach, M. E. Read, K. E. Hachett e. a. — *Phys. Rev. Lett.*, 1980, vol. 44, p. 647—650.
49. Ott E., Hui B., Chu K. R. Theory of electron cyclotron resonance heating of tokamak plasmas. — *Phys. Fluids*, 1980, vol. 23, p. 1031—1045.
50. McVey B., Scharer J. Measurement of collisionless electron-cyclotron damping along a weak magnetic beach. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, vol. 31, p. 14—17.
51. Christopoulos C., Boswell R. W., Christiansen P. J. Measurements of spatial cyclotron damping in a uniform magnetic field. — *Phys. Lett.*, 1974, vol. 47A, p. 239—240.
52. McVey B. D., Sharer J. E. Experimental verification of collisionless electron cyclotron damping. — *Phys. Fluids*, 1974, vol. 17, p. 142—147.
53. Microwave heated plasma in a symmetric mirror facility/ N. H. Lazar, R. A. Dandl, W. F. Di Vergilio e. a. — *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1980, vol. 25, p. 993—994.
54. Экспериментальное исследование возбуждения ионных циклотронных волн антенной щелевого типа/ О. М. Швед, С. С. Калиниченко, А. И. Лысойван и др. — *Физика плазмы*, 1981, т. 7, с. 485—493.

55. Energy balance in RFC-XX/ S. Okamura, K. Adati, T. Aoki e. a. 10-th European conf. on contr. fusion and plasma phys. Moscow, 1981, vol. 1, C-4—C-4.
56. Plasma confinement in the tandem mirror experiment/ E. B. Hooper, Jr., S. L. Allen, T. A. Casper e. a. — 10-th European conf. on contr. fusion and plasma phys., Moscow, 1981, vol. 1, C-18—C-18.
57. Stix T. Fast wave heating of a two-component tokamak. — Nucl. Fusion, 1975, vol. 15, p. 737—754.
58. Клима П., Лонгинов А. В., Степанов К. Н. Циклотронное поглощение быстрых магнитозвуковых волн при наличии малой группы резонансных ионов. — Журн. техн. физ., 1976, т. 66, с. 704—708.
59. Buchsbaum S. J. Resonance in a plasma with two ion species. — Phys. Fluids, 1960, vol. 3, p. 418—420.
60. Perkins F. W. Heating tokamaks via the ion-cyclotron and ion-ion hybrid resonances. — Nucl. Fus., 1977, vol. 17, p. 1197—1224.
61. Shott G. A. Electromagnetic radiation. Cambridge, Cambr. Univ. Press, 1912.
62. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974. — 391 с.
63. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973. — 504 с.
64. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1975. — 414 с.
65. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. — 702 с.
66. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973. — 374 с.
67. Тимофеев А. В. О механизме синхротронного излучения. Препринт ИАЭ-3599, 1982. — 9 с.
68. Трубников Б. А. Излучение плазмы в магнитном поле. — Докл. АН СССР, 1958, т. 118, с. 913—916.
69. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. — 620 с.
70. Цытович В. Н. К вопросу об излучении быстрых электронов в магнитном поле при наличии среды. — Вест. Моск. ун-та, 1951, № 11, с. 27—36.
71. Сковорода А. А., Тимофеев А. В., Швилькин Б. Н. Определенные температуры плазмы по циклотронному поглощению в неоднородном магнитном поле. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1977, т. 73, с. 526—536.
72. Трубников Б. А. Электромагнитные волны в релятивистской плазме при наличии магнитного поля. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. 3, с. 104—113.
73. Трубников Б. А., Бажанова А. Е. Магнитное излучение слоя плазмы. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. 3, с. 121—147.
74. Drummond W. E., Rosenbluth M. N. Cyclotron radiation from a hot plasma. — Phys. Fluids, 1963, vol. 6, p. 276—283.
75. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. — 719 с.
76. Proc. of the workshop EBT ring physics. Oak Ridge, Ed. N. A. Uckan, 1979. 540 p.
77. Rosenbluth M. N. Synchrotron radiation in tokamaks. — Nucl. Fus., 1970, vol. 10, p. 340—343.
78. Парилл В. В., Погуце О. П. Ускоренные электроны в токамаке. — В кн.: Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича, Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1982, вып. 11, с. 5—55.
79. Hosen J., Arunasalam V., Cano R. Electron cyclotron emission from the Princeton large tokamak. — Phys. Rev. Lett., 1977, vol. 39, p. 408—411.
80. Hutchinson I. H., Room D. S. Electron cyclotron emission in alcator tokamak. — Nucl. Fus., 1977, vol. 17, p. 1077—1084.
81. Акулина Д. К., Хольнов Ю. В. Исследование электронного циклотронного излучения плазмы на стеллараторе Л-2. — Физика плазмы, 1978, т. 4, с. 1015—1021.
82. Electron temperature measurements from cyclotron emission in the T-10 tokamak/ R. Cano, A. A. Bagdasarov, A. B. Berlisov e. a. — Nucl. Fus., 1979, vol. 19, p. 1415—1421.

83. Efthimion P. C., Arunasalam V., Hosea J. C. Ordinary mode fundamental electron-cyclotron resonance absorption and emission in the PLT. — *Phys. Rev. Lett.*, 1980, vol. 44, p. 396—400.
84. Hirshfield J. L., Brown S. C. Incoherent microwave radiation from a plasma in a magnetic field. — *Phys. Rev.*, 1961, vol. 122, p. 719—725.
85. Observations of obliquely propagating electron Bernstein waves/ R. J. Armstrong, J. J. Rasmussen, R. J. Stenzel, J. Trulsen. — *Phys. Lett.*, 1981, vol. A85, p. 281—284.
86. Schmitt J. P. M. Dispersion and cyclotron damping of pure ion Bernstein waves. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, vol. 31, p. 982—986.
87. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1946, т. 16, с. 574—586.
88. Van Kampen N. G. On the theory of stationary waves in plasmas. — *Physica*, 1955, vol. 21, p. 949—963. (Перевод в кн.: Колебания сверхвысоких частот в плазме. М.: Изд-во иностр. лит., 1961, с. 37—70).
89. Бом Д. Общая теория коллективных переменных. М.: Мир, 1964. — 152 с.
90. Карпман В. И. Об «особых» решениях уравнений для плазменных колебаний. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1966, т. 51, с. 907—914.
91. Nonlocal reflection in inhomogeneous plasma/ H. L. Berk, C. W. Horton, M. N. Rosenbluth et al. — *Phys. Fluids*, 1968, vol. 11, p. 365—371.
92. Водяницкий А. А., Ерохин Н. С., Моисеев С. С. О влиянии кинетических эффектов в неоднородной плазме на проникновение и распространение электромагнитных волн. — Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 12, с. 529—532.
93. Лиситченко В. В., Ораевский В. Н. «Просветление» волновых барьеров для плазменных и электромагнитных волн, связанное с кинетическими эффектами. — *Докл. АН СССР*, 1971, т. 201, с. 1319—1321.
94. Brambilla M. Self-consistent propagation of an electromagnetic wave and power absorption at the electron gyroresonance in a plasma immersed in a non-uniform magnetic field. — *Nucl. Fus.*, 1969, vol. 9, p. 343—351.
95. Жуковский В. Г., Тимофеев А. В. Модулированные пучки в циклотронных колебаниях на установке АС. — *Физика плазмы*, 1975, т. 1, с. 111—113.
96. Timofeev A. V., Zhukovskii V. G. Anisotropic cyclotron instability in the AS device. — *Plasma Phys.*, 1976, vol. 18, p. 341—358.
97. Timofeev A. V., Nekrasov A. K. Cyclotron heating of a plasma in a non-uniform magnetic field. — *Nucl. Fus.*, 1970, vol. 10, p. 377—381.
98. Тимофеев А. В., Чулков Г. Н. Правило обхода Ландау в проблеме циклотронного резонанса в неоднородном магнитном поле. — *Физика плазмы*, 1981, т. 7, с. 129—135.
99. Kuckes A. F. Resonant absorption of electromagnetic waves in a nonuniformly magnetized plasma. — *Plasma Phys.*, 1968, vol. 10, p. 367—380.
100. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. — 294 с.
101. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. — 752 с.
102. Сковорода А. А., Швилюк Б. Н. Изучение циклотронного поглощения электромагнитных волн в плазме в неоднородном магнитном поле. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1976, т. 70, с. 1779—1784.
103. Звонков А. В., Тимофеев А. В. Электронный циклотронный резонанс электромагнитных колебаний, распространяющихся поперек неоднородного магнитного поля. — *Физика плазмы*, 1980, т. 6, с. 1219—1226.
104. Хединг Д. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965. — 238 с.
105. Фреман Н., Фреман У. П. ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967. — 168 с.
106. Звонков А. В., Чулков Г. Н. Кинетические эффекты при ЭЦР в неоднородном магнитном поле. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1983, т. 84, с. 60—70.
107. Тимофеев А. В., Чулков Г. Н. Электронный циклотронный резонанс для электромагнитных колебаний, распространяющихся под углом к неоднородному магнитному полю. — *Физика плазмы*, 1978, т. 4, с. 624—632.
108. Batchelor D. B. Budden tunneling in parallel stratified plasmas. — *Plasma Phys.*, 1980, vol. 22, p. 41—55.

109. **Ерохин Н. С., Мойсеев С. С.** Волновые процессы в неоднородной плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973, вып. 7, с. 146—204.
110. **О циклотронном нагреве плазмы в тороидальных системах/ Литвак А. Г., Пермитин Г. В., Суворов Е. В., Фрайман А. А.** — Письма в ЖТФ, 1975, т. 1, с. 858—862.
111. **Перспективы использования электронно-циклотронных волн для нагрева крупномасштабных установок токамак/ В. В. Аликаев, Ю. Н. Днестровский, В. В. Парайл, Г. В. Переверзев.** — Физика плазмы, 1977, т. 3, с. 230—238.
112. **Electron-cyclotron heating of plasma in toroidal systems/ A. G. Litvak, G. V. Permitin, E. V. Suvorov, B. A. Frajman.** — Nucl. Fus., 1977, vol. 17, p. 659—665.
113. **Audenaerde K., Celata C. M.** The spectral emissivity at the electron cyclotron frequency. — Plasma Phys., 1978, vol. 20, p. 703—711.
114. **Antonsen T. M., Manheimer W. M.** Electromagnetic wave propagation in inhomogeneous plasmas. — Phys. Fluids, 1978, vol. 21, p. 2295—2305.
115. **Baumgartel K.** Electron cyclotron absorption of the ordinary wave at normal incidence. — Nucl. Fus., 1979, vol. 19, p. 1543—1546.
116. **Wave damping near the electron cyclotron frequency/ I. Fidone, G. Granate, R. L. Meyer, G. Ramponi.** — Plasma Phys., 1980, vol. 22, p. 203—205.
117. **Batchelor D. B., Goldfinger R. C.** A theoretical study of electron-cyclotron absorption in EBT. — Nucl. Fus., 1980, vol. 20, p. 403—418.
118. **Федоров В. И.** О циклотронном поглощении электромагнитных волн. — Письма в ЖТФ, 1980, т. 6, с. 1307—1310.
119. **Bornatici M.** Dielectric effects in the electron cyclotron absorption. — Proc. of Intern. Conf. on Plasma Phys. Nagoya, Japan, 1980, vol. 2, p. 271—277.
120. **Propagation and heating by electron cyclotron wave in a toroidal plasma/ A. Crescentini, E. Lazzaro, M. Lontano e. a.** — Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res., IAEA: Vienna, 1981, vol. 2, p. 537—546.
121. **Lazzaro E., Ramponi G., Giruzzi G.** Full-wave propagation analysis for the X-mode at  $2\omega_{ce}$ . — 10th Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys., Moscow, 1981, vol. 1, K-1—K-1.
122. **Звонков А. В.** Резонанс на второй гармонике электронной циклотронной частоты при поперечном распространении волны в неоднородном магнитном поле. — Физика плазмы, 1983, т. 9, с. 547—552.
123. **Skovoroda A. A., Chulkov G. N.** Electron cyclotron resonance as a tool for plasma diagnostics in open traps. — Nucl. Fus., 1981, vol. 21, p. 787—802.
124. **Skovoroda A. A., Zhiltsov V. A.** ECR as a diagnostic for mirror trap plasma. — J. de Phys., 1979, vol. 40, p. C7-665—C7-665.
125. **Experimental studies of loss mechanism under the influence of cyclotron instabilities in a rarefield plasma/ V. A. Zhiltsov, P. M. Kosarev, V. Kh. Likhentein e. a.** — Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res., IAEA: Vienna, 1979, vol. 2, p. 469—481.
126. **Electron heating under the influence of the ion cyclotron instability in a min-B mirror trap/ V. A. Zhiltsov, P. M. Kosarev, D. A. Panov e. a.** — 9th European Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys., Oxford, 1979, p. 40—40.
127. **Тимофеев А. В.** Теория циклотронного нагрева в длинных адиабатических ловушках. — Физика плазмы, 1975, т. 1, с. 88—110.
128. **Rosenbluth M. N.** Superadiabaticity in mirror machines. — Phys. Rev. Lett., 1972, vol. 29, p. 408—410.
129. **Nekrasov A. K.** Statistical description of cyclotron heating in a non-uniform magnetic field. — Nucl. Fus., 1970, vol. 10, p. 387—390.
130. **Jaeger F., Lichtenberg A. J., Lieberman M.** Theory of electron cyclotron resonance heating-I. Short time and adiabatic effects. — Plasma Phys., 1972, vol. 14, p. 1073—1100.
131. **Lieberman M. A., Lichtenberg A. J.** Theory of electron cyclotron resonance heating-II. Long time and stochastic effects. — Plasma Phys., 1973, vol. 15, p. 125—150.
132. **Lieberman M. A., Lichtenberg A. J.** Stochastic and adiabatic behaviour of particles accelerated by periodic forces. — Phys. Rev., 1972, vol. A5, p. 1852—1866.

133. **Timofeev A. V.** Confinement of charged particles in adiabatic traps in the presence of monochromatic cyclotron oscillations. — *Nucl. Fus.*, 1974, vol. 14, p. 165—171.
134. **Wyeth N. C., Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.** Electron cyclotron resonance heating in a pulsed mirror experiment. — *Plasma Phys.*, 1975, vol. 17, p. 679—688.
135. **Smith G. R., Byers J. A., Lo Destro L. L.** Superadiabatic and stochastic ion motion in the presence of a wave in a mirror-machine plasma. — *Phys. Fluids*, 1980, vol. 23, p. 278—286.
136. **Чириков Б. В.** Резонансные процессы в магнитном поле. — *Атомная энергия*, 1959, т. 6, с. 630—638.
137. **Заславский Г. М.** Статическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970. — 143 с.
138. **Заславский Г. М., Чириков Б. В.** Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. — *Успехи физ. наук*, 1971, т. 105, с. 3—39.
139. **Chirikov V. V.** Universal instability of many-dimensional oscillator systems. — *Phys. Rep.*, 1979, vol. 52, p. 263—379.
140. **Rechester A. B., White R. B.** Calculation of turbulent diffusion for the Chirikov-Taylor model. — *Phys. Rev. Lett.*, 1980, vol. 44, p. 1586—1589.
141. **Rochester A. B., Rosenbluth M. N., White R. B.** Fourier-space paths applied to the calculation of diffusion for the Chirikov-Taylor model. — *Phys. Rev.*, 1981, vol. A23, p. 2664—2672.
142. **Seidl M.** High frequency heating of electrons in a mirror machine. — *J. Nucl. Energy P. C. (Plasma Phys.)*, 1964, vol. 6, p. 597—616.
143. **Cary J. R., Kaufman A. N.** Ponderomotive effects in collisionless plasma: a Lie transform approach. — *Phys. Fluids*, 1981, vol. 24, p. 1238—1250.
144. **Lacina J.** A solution of the motion of a charged particle in magnetic mirror systems. — *Czech. J. Phys.*, 1963, vol. B13, p. 401—417.
145. **Тимофеев А. В.** Уравнение квазилинейной диффузии ионов в адиабатической ловушке при дрейфово-конусной неустойчивости. М., Препринт ИАЭ-3479/6, 1981. — 11 с.
146. **Berk H. L.** Derivation of the quasi-linear equation in a magnetic field. — *J. Plasma Phys.*, 1978, vol. 20, p. 205—219.
147. **Галеев А. А., Сагдеев Р. З.** «Неоклассическая» теория диффузии. — В кн.: *Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича.* М.: Атомиздат, 1973, вып. 7, с. 205—273.
148. **Lichtenberg A. J., Melin G.** Diffusion in electron resonance heating magnetic mirrors. — *Phys. Fluids*, 1973, vol. 16, p. 1660—1667.
149. **Momota H., Takizuka T.** Randomization of the gyration phase through binary collisions. — *Phys. Fluids*, 1974, vol. 17, p. 2290—2291.
150. **Menyuk C. R., Lee Y. C.** Finite bandwidth induced stochasticity in a magnetic mirror. — *Phys. Fluids*, 1980, vol. 23, p. 2225—2241.
151. **Тимофеев А. В.** Об уширении спектра плазменных колебаний и коэффициентах переноса в режиме слабой турбулентности. — *Физика плазмы*, 1976, т. 3, с. 419—421.
152. **Cohen R. H., Nevins W. M., Rowlands G.** Diffusion on two length scales. — *Phys. Fluids*, 1981, vol. 24, p. 1584—1585.
153. **Smith G. R., Cohen B. I.** Perturbed-trajectory derivation of quasi-linear diffusion and application to mirror plasmas. — *Phys. Fluids*, 1983, vol. 26, p. 238—246.
154. **Тимофеев А. В.** О циклотронном нагреве в коротких адиабатических ловушках. — *Физика плазмы*, 1977, т. 3, с. 913—919.
155. **Трубников Б. А.** Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме. — В кн.: *Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича.* М.: Госатомиздат, 1963, вып. 1, с. 98—182.
156. **Faulconer D. W., Liboff R. L.** Relativistic cyclotron resonance heating. — *Phys. Fluids*, 1972, vol. 15, p. 1831—1841.
157. **Пиля А. Д., Федоров В. И.** Нелинейный циклотронный резонанс в поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль постоянного магнитного поля. — *Журн. техн. физ.*, 1968, т. 38, с. 1032—1042.

158. Головановский К. С., Дугар-Жабон В. Д., Милайцев В. П. О механизме электронно-циклотронного нагрева бесстолкновительной плазмы. — Физика плазмы, 1975, т. 1, с. 655—661.
159. Roberts C. S., Buchsbaum S. J. Motion of a charged particle in a constant magnetic field and a transverse electromagnetic wave propagating along the field. — Phys. Rev., 1964, vol. 135, p. A381—A389.
160. Давыдовский В. Я. О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1963, т. 43, с. 886—888.
161. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Резонансные явления при движении частицы в плоской волне. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1963, т. 44, с. 261—269.
162. Пиля Д. А., Френкель В. Я. Циклотронный резонанс электронов в магнитной ловушке. 1. Функция распределения. — Журн. техн. физ., 1964, с. 34, с. 1752—1768.
163. Baldwin D. E., Logan B. G. Improved tandem mirror fusion reactor. — Phys. Rev. Lett., 1979, vol. 43, p. 1318—1321.
164. Стабилизация конусной неустойчивости столкновительной плазмы в зеркальной ловушке/ М. С. Иоффе, Б. И. Канаев, В. П. Пастухов, Юшманов Е. Е. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 67, с. 2145—2156.
165. Канаев В. И., Stabilization of drift loss-cone instability (DCI) by addition of cold ions. — Nucl. Fus., 1979, vol. 19, p. 347—359.
166. High power fundamental and harmonic resonant ion cyclotron heating in a mirror machine/ R. W. Clark, D. G. Swanson, P. Korn e. a. — Phys. Fluids, 1974, vol. 17, p. 1322—1328.
167. Watson C. Y. H., Kuo-Petravic L. G. Charged-particle containment in rf-supplemented magnetic mirror machines. — Phys. Rev. Lett., 1968, vol. 20, p. 1231—1235.
168. Theory and experiment on radio-frequency plugging of magnetically confined plasma in open-ended systems/ T. Watari, S. Hiroe, T. Sato, S. Ichimara. — Phys. Fluids, 1974, vol. 17, p. 2107—2115.
169. Hatori T., Watanabe T. Critical energy for adiabatic RF plugging. — Nucl. Fus., 1975, vol. 15, p. 143—150.
170. Lichtenberg A. I., Berk H. L. Adiabaticity limits to radio-frequency-augmented magnetic mirror confinement. — Nucl. Fus., 1975, vol. 15, p. 999—1005.
171. Radio-frequency plugging of a high density plasma/ T. Watari, T. Hatori, R. Kumazawa e. a. — Phys. Fluids, 1978, vol. 21, p. 2076—2081.
172. Gormezano C. Reduction of losses in open-ended magnetic traps. — Nucl. Fus., 1979, vol. 19, p. 1085—1137.
173. Motz H., Watson C. Y. M. RF confinement and acceleration of plasmas. — Advances Electronics and Electron Phys., 1967, vol. 23, p. 153—302.
174. Kuckes A. F. Resonant absorption of electromagnetic waves in nonuniformly magnetized plasma. — Plasma Phys., 1968, vol. 10, p. 367—381.
175. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. — 683 с.
176. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. — 439 с.

# СОДЕРЖАНИЕ

---

## СОЛИТОНЫ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

*В. И. Петвиашвили, В. В. Янков*

|                                                                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение . . . . .                                                                                                                                      | 3  |
| 1. Простейшие солитоны и интегралы движения . . . . .                                                                                                   | 4  |
| 2. Солитон — статистический аттрактор . . . . .                                                                                                         | 8  |
| 3. Примеры получения упрощенных уравнений. Многомерные обобщения уравнения КдФ, уравнение МГД-волны, распространяющейся вдоль магнитного поля . . . . . | 11 |
| 4. Численный метод получения солитонных решений . . . . .                                                                                               | 16 |
| 5. Устойчивость солитонов и периодических волн . . . . .                                                                                                | 17 |
| 6. Взаимодействие солитона со свободными волнами . . . . .                                                                                              | 24 |
| 7. Взаимодействие солитонов с частицами . . . . .                                                                                                       | 26 |
| 8. Излучение солитонами электромагнитных волн . . . . .                                                                                                 | 27 |
| 9. Высокочастотный солитон под действием медленно изменяющихся возмущений . . . . .                                                                     | 29 |
| 10. Связанные многосолитонные состояния — мультисолитоны . . . . .                                                                                      | 31 |
| 11. Методы обнаружения скрытнолинейных уравнений . . . . .                                                                                              | 33 |
| 12. Двумерные вихри в несжимаемой жидкости . . . . .                                                                                                    | 35 |
| 13. Проблемы конечномерных аппроксимаций . . . . .                                                                                                      | 37 |
| 14. Дрейфовые вихри в атмосфере и плазме . . . . .                                                                                                      | 39 |
| 15. Трехмерные локализованные вихри в обычной и магнитной гидродинамике . . . . .                                                                       | 44 |
| 16. Устойчивые вихри в уравнении Власова . . . . .                                                                                                      | 50 |
| Заключение . . . . .                                                                                                                                    | 51 |
| Список литературы . . . . .                                                                                                                             | 52 |

## ЦИКЛОТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ

*А. В. Тимофеев*

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие . . . . .                                                                | 56  |
| 1. Циклотронные колебания в однородном магнитном поле . . . . .                      | 58  |
| 1.1. Механизм резонансного циклотронного взаимодействия . . . . .                    | 58  |
| 1.2. Циклотронное поглощение . . . . .                                               | 75  |
| 1.3. Магнитотормозное (циклотронное) излучение . . . . .                             | 94  |
| 1.4. Собственно циклотронные колебания . . . . .                                     | 109 |
| 2. Циклотронные колебания в неоднородном магнитном поле . . . . .                    | 113 |
| 2.1. Резонансное циклотронное взаимодействие в неоднородном магнитном поле . . . . . | 113 |

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.2. Циклотронные колебания в монотонно меняющемся магнитном поле . . . . .                            | 133 |
| 2.3. Циклотронные колебания в немонотонно меняющемся магнитном поле . . . . .                          | 164 |
| 3. Циклотронные колебания в ограниченных системах . . . . .                                            | 173 |
| 3.1. Циклотронный нагрев в регулярных колебаниях. Возникновение стохастичности . . . . .               | 173 |
| 3.2. Циклотронный нагрев при наличии случайных воздействий                                             | 189 |
| 3.3. Эффекты, обусловленные резонансным циклотронным взаимодействием в ограниченных системах . . . . . | 198 |

## Приложения

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| П.1. Решение уравнения (2.13) . . . . .                                              | 213 |
| П.2. Модификация правила обхода . . . . .                                            | 214 |
| П.3. Правило обхода Ландау при ускоренном движении электронов                        | 215 |
| П.4. О теореме взаимности . . . . .                                                  | 216 |
| П.5. Уравнение квазилинейной диффузии электронов в адиабатических ловушках . . . . . | 217 |
| П.6. Вычисление сдвига точки отражения электрона от магнитной пробки . . . . .       | 218 |
| Список литературы . . . . .                                                          | 220 |



УДК 533.951.7

**Солитоны и турбулентность.** Петвиашвили В. И., Янков В. В. 1985, с. 3.

Представлен обзор теорий солитонов в плазме и жидкости, отличающийся от ранее опубликованных более подробным рассмотрением вопросов турбулентности. На основе статистического рассмотрения показана выделенная роль солитонов в турбулентности. Изложены методы нахождения солитонных решений, исследования устойчивости, изучения взаимодействия солитонов со свободными волнами и частицами плазмы. Основное внимание уделено неинтегрируемым системам. Приводятся способы обнаружения интегрируемых систем. Рассмотрены устойчивые вихри в двумерной жидкости, в том числе на вращающейся сфере. Изложены методы построения локализованных вихрей в трехмерной жидкости.

Ил. 14. Библиогр. 91.

УДК 533.951

**Циклотронные колебания равновесной плазмы.** Тимофеев А. В. 1985, с. 56.

Проанализирован механизм взаимодействия отдельных заряженных частиц с циклотронными колебаниями. Получены компактные выражения для коэффициентов пространственного затухания циклотронных колебаний в однородном магнитном поле. Циклотронное излучение термоядерной плазмы рассматривается как синхротронное излучение высокоэнергетического «хвоста» максвелловской функции распределения электронов. Выяснена роль псевдодоли при резонансном циклотронном взаимодействии в неоднородном магнитном поле. Вычислены коэффициенты поглощения, прохождения и отражения колебаний при их распространении через точку циклотронного резонанса в неоднородном магнитном поле. Рассмотрено явление возникновения стохастичности при взаимодействии циклотронных колебаний с заряженными частицами. Анализируется влияние случайных воздействий на резонансное циклотронное взаимодействие. Обсуждается ряд явлений, возникающих под действием циклотронных колебаний в неоднородном магнитном поле: «просвист» в циклотронных колебаниях, возникновение «плещущихся» частиц, «затыкание» пробок адиабатических ловушек.

Ил. 57. Библиогр. 176.

## **ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ**

В ы п. 14

Редактор *З. Д. Андреевко*

Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*

Технический редактор *Н. П. Собакина*

Корректор *М. Г. Гулина*

ИБ № 971

Сдано в набор 16.08.84                      Подписано в печать 7.02.85                      Т-06609  
Формат 60 × 90<sup>1/16</sup>      Бумага типографская № 1      Гарнитура литературная  
Печать высокая      Усл. печ. л. 14,5      Усл. кр.-отг. 14,5      Уч.-изд. л. 17,14  
Тираж 910 экз.                      Заказ 67                      Цена 2 р. 70 к.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова»  
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Ва-  
ловая, 28

ВОПРОСЫ  
ТЕОРИИ  
ПЛАЗМЫ

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ